

TRIGONOMETRÍA

Grado décimo



Elkin Torres Rivera

Institución Educativa Cecilia de Lleras
Montería
2026

Índice general

1. ÁNGULOS	3
1.1. Definición.	3
1.2. Clases de ángulos.	3
1.2.1. Ángulo agudo.	3
1.2.2. Ángulo recto.	3
1.2.3. Ángulo obtuso.	3
1.2.4. Ángulo llano.	3
1.2.5. Ángulo oblicuo.	4
1.2.6. Ángulo perigonal o completo.	4
1.3. Sistemas para expresar medidas de ángulos.	4
1.3.1. Sistemas sexagesimal.	4
1.3.2. Sistemas cíclico.	5
1.3.3. Sistemas centesimal.	5
1.4. Clasificación de ángulos según sus posiciones relativas entre rectas.	6
1.4.1. Ángulos opuestos por el vértice.	6
1.4.2. Ángulos correspondientes.	6
1.4.3. Ángulos alternos internos.	6
1.4.4. Ángulos alternos externos.	6
1.5. Otras clases de ángulos.	7
1.5.1. Ángulos complementarios.	7
1.5.2. Ángulos suplementarios.	8
1.5.3. Ángulos explementarios.	8

1.6. Ejercicios de aplicación.	8
2. TRIÁNGULOS	9
2.1. Definición.	9
2.2. Clases de triángulos según las medidas de sus ángulos.	9
2.2.1. Triángulo acutángulo.	9
2.2.2. Triángulo rectángulo.	9
2.2.3. Triángulo obtusángulo.	10
2.3. Clases de triángulos según la medida de sus lados. . . .	10
2.3.1. Triángulo equilátero.	10
2.3.2. Triángulo isósceles.	10
2.3.3. Triángulo escaleno.	10
2.4. Teorema de Pitágoras.	11

Capítulo 1

ÁNGULOS

1.1. Definición.

Un ángulo es la abertura que existe entre dos segmentos de recta o semirectas que parten de un mismo punto llamado vértice.

1.2. Clases de ángulos.

Existen diferentes clases de ángulos según sus medidas.

1.2.1. Ángulo agudo.

Un ángulo agudo es aquel cuya medida es menor que 90° .

1.2.2. Ángulo recto.

Un ángulo recto es aquel cuya medida es de 90° .

1.2.3. Ángulo obtuso.

Un ángulo obtuso es aquel cuya medida es mayor que 90° y menor que 180° .

1.2.4. Ángulo llano.

Un ángulo llano es aquel cuya medida es de 180° .

1.2.5. Ángulo oblicuo.

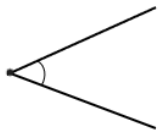
Un ángulo oblicuo es aquel cuya medida no es un múltiplo de 90° .

1.2.6. Ángulo perigonal o completo.

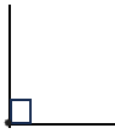
Un ángulo perigonal o completo es aquel cuya medida es de 360° .

Clases de ángulos

Ángulo agudo



Ángulo recto



Ángulo obtuso



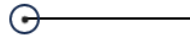
Ángulo llano



Ángulo oblicuo



Ángulo completo o perigonal



1.3. Sistemas para expresar medidas de ángulos.

Existen diferentes sistemas para expresar medidas de ángulos. Dentro de estos sistemas encontramos el sistema sexagesimal, el sistema cíclico y el sistema centesimal.

1.3.1. Sistemas sexagesimal.

En este sistema los ángulos se miden en grados, minutos y segundos. Por ejemplo, un ángulo puede medir $43^\circ 32' 47''$ (43 grados, 32 minutos y 47 segundos).

Un grado equivale a $\frac{1}{360}$ parte de la longitud de una circunferencia. Un grado equivale a 60 minutos y un minuto equivale a 60 segundos.

1.3.2. Sistemas cíclico.

En este sistema los ángulos se miden en radianes. Por ejemplo, un ángulo puede medir $\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$.

La longitud de una circunferencia equivale a 2π radianes, por lo tanto, la mitad de su longitud equivale a π radianes.

1.3.3. Sistemas centesimal.

En este sistema los ángulos se miden en gradianes. Por ejemplo, un ángulo puede medir 50^g (50 gradianes).

Un gradián equivale a $\frac{1}{400}$ parte de la longitud de una circunferencia.

Tabla 1.1: Tabla de equivalencias entre sistemas.

Grado	Radián	Gradián
0°	0 rad	0^g
30°	$\frac{\pi}{6} \text{ rad}$	$\frac{100^g}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4} \text{ rad}$	50^g
60°	$\frac{\pi}{3} \text{ rad}$	$\frac{200^g}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2} \text{ rad}$	100^g
120°	$\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$	$\frac{400^g}{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4} \text{ rad}$	150^g
150°	$\frac{5\pi}{6} \text{ rad}$	$\frac{500^g}{3}$
180°	$\pi \text{ rad}$	200^g
210°	$\frac{7\pi}{6} \text{ rad}$	$\frac{700^g}{3}$
225°	$\frac{5\pi}{4} \text{ rad}$	250^g
240°	$\frac{4\pi}{3} \text{ rad}$	$\frac{800^g}{3}$
270°	$\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$	300^g
300°	$\frac{5\pi}{3} \text{ rad}$	$\frac{1000^g}{3}$
315°	$\frac{7\pi}{6} \text{ rad}$	350^g
330°	$\frac{11\pi}{6} \text{ rad}$	$\frac{1100^g}{3}$
360°	$2\pi \text{ rad}$	400^g

1.4. Clasificación de ángulos según sus posiciones relativas entre rectas.

Los ángulos se pueden clasificar según las posiciones relativas que ocupan cuando se trazan entre rectas paralelas y secantes. Podemos encontrar ángulos opuestos por el vértice, ángulos correspondientes, ángulos alternos internos y ángulos alternos externos.

1.4.1. Ángulos opuestos por el vértice.

Dos ángulos son opuestos por el vértice cuando comparten el mismo vértice y los lados de uno son prolongaciones de los lados del otro. Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes (poseen la misma medida).

1.4.2. Ángulos correspondientes.

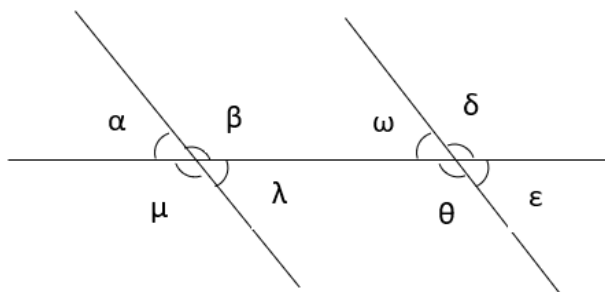
Dos ángulos son correspondientes cuando se ubican del mismo lado de dos rectas paralelas cortadas por una secante. Los ángulos correspondientes son congruentes (poseen la misma medida).

1.4.3. Ángulos alternos internos.

Dos ángulos son alternos internos cuando se ubican al interior de rectas paralelas y de lados opuestos cuando son cortadas por una secante. Los ángulos alternos internos son congruentes (poseen la misma medida).

1.4.4. Ángulos alternos externos.

Dos ángulos son alternos externos cuando se ubican al exterior de rectas paralelas y de lados opuestos cuando son cortadas por una secante. Los ángulos alternos externos son congruentes (poseen la misma medida).



Son ángulos opuestos por el vértice:

α con λ . β con μ . ω con ϵ . δ con θ .

Son ángulos correspondientes:

α con ω . β con δ . μ con θ . λ con ϵ .

Son ángulos alternos internos:

β con θ . λ con ω .

Son ángulos alternos externos:

α con ϵ . μ con δ .

1.5. Otras clases de ángulos.

Existen otras clases de ángulos que es importante conocer. Dentro de estos encontramos los ángulos complementarios, los ángulos suplementarios y los ángulos explementarios.

1.5.1. Ángulos complementarios.

Dos ángulos son complementarios cuando la suma de sus medidas es 90° . Por ejemplo, los ángulos de 60° y 30° son complementarios.

1.5.2. Ángulos suplementarios.

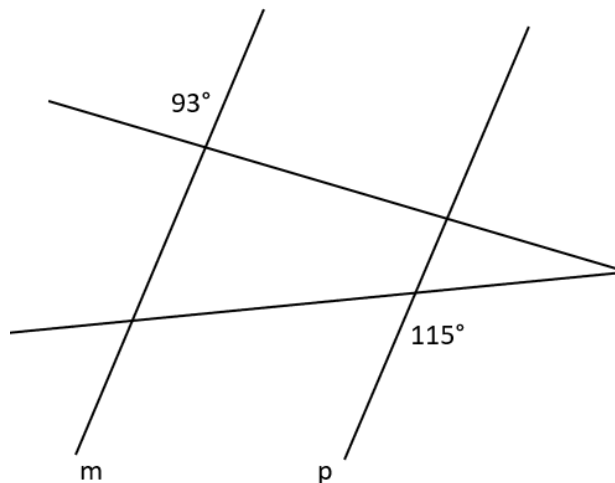
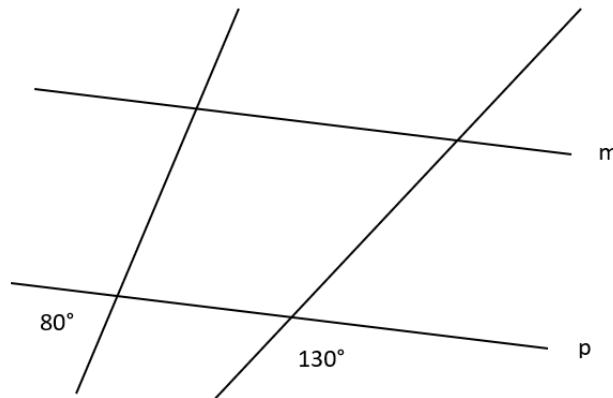
Dos ángulos son suplementarios cuando la suma de sus medidas es 180° . Por ejemplo, los ángulos de 110° y 70° son suplementarios.

1.5.3. Ángulos explementarios.

Dos ángulos son explementarios cuando la suma de sus medidas es 360° . Por ejemplo, los ángulos de 350° y 10° son explementarios.

1.6. Ejercicios de aplicación.

Dadas las siguientes figuras determine las medidas de todos los ángulos formados, sabiendo que las rectas m y p son paralelas.



Capítulo 2

TRIÁNGULOS

2.1. Definición.

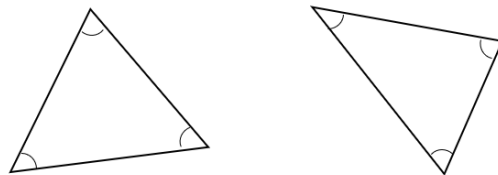
Un triángulo es un polígono formado por tres lados, tres ángulos y tres vértices.

2.2. Clases de triángulos según las medidas de sus ángulos.

Los triángulos según las medidas de sus ángulos se clasifican en triángulos acutángulos, triángulos rectángulos y triángulos obtusángulos.

2.2.1. Triángulo acutángulo.

Un triángulo acutángulo es un triángulo que posee sus tres ángulos agudos.



2.2.2. Triángulo rectángulo.

Un triángulo rectángulo es un triángulo que posee un ángulo recto.



2.2.3. Triángulo obtusángulo.

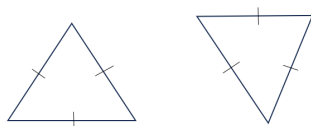
Un triángulo obtusángulo es un triángulo que posee un ángulo obtuso.



2.3. Clases de triángulos según la medida de sus lados.

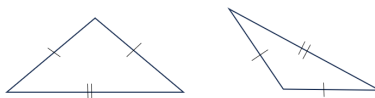
2.3.1. Triángulo equilátero.

Un triángulo equilátero es un triángulo que posee sus tres lados con la misma medida.



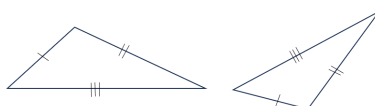
2.3.2. Triángulo isósceles.

Un triángulo isósceles es un triángulo que posee dos de sus lados con la misma medida.



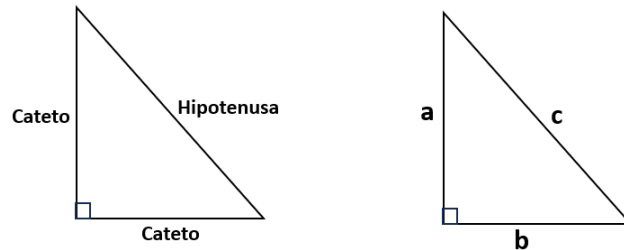
2.3.3. Triángulo escaleno.

Un triángulo escaleno es un triángulo que posee sus tres lados con medidas diferentes.



2.4. Teorema de Pitágoras.

Cuando tenemos un triángulo rectángulo llamamos catetos a los dos lados más cortos e hipotenusa al lado más largo.



En todo triángulo rectángulo se cumple el teorema de Pitágoras, el cual plantea que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

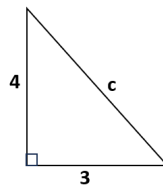
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Esta fórmula sirve para calcular el valor de la hipotenusa cuando se conocen los valores de los catetos. Si se requiere calcular el valor de uno de los catetos simplemente se usan las siguientes fórmulas:

$$a^2 = c^2 - b^2$$

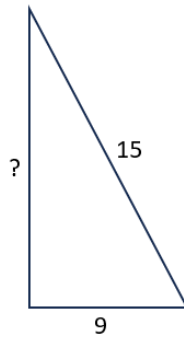
$$b^2 = c^2 - a^2$$

Ejemplo. Dado el siguiente triángulo calcule el valor de la hipotenusa.



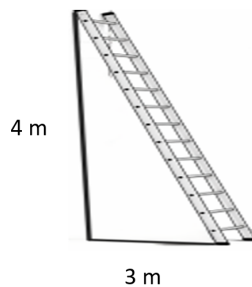
$$\begin{aligned} c^2 &= 4^2 + 3^2 \\ \Rightarrow c^2 &= 16 + 9 \\ \Rightarrow c^2 &= 25 \\ \Rightarrow c &= \sqrt{25} \\ \Rightarrow c &= 5 \end{aligned}$$

Ejemplo. Dado el siguiente triángulo calcule el valor del cateto desconocido.



$$\begin{aligned}a^2 &= 15^2 - 9^2 \\ \Rightarrow a^2 &= 225 - 81 \\ \Rightarrow a^2 &= 144 \\ \Rightarrow a &= \sqrt{144} \\ \Rightarrow a &= 12\end{aligned}$$

Ejemplo. Una escalera se apoya sobre una pared a una altura de 4 m, si el pie de la escalera se encuentra a 3 m de la base de la pared, determine la longitud de la escalera.



$$\begin{aligned}c^2 &= 4^2 + 3^2 \\ \Rightarrow c^2 &= 16 + 9 \\ \Rightarrow c^2 &= 25 \\ \Rightarrow c &= \sqrt{25} \\ \Rightarrow c &= 5\end{aligned}$$

R/. La longitud de la escalera es de 5 m.

Ejemplo. Dos automóviles parten al mismo tiempo y desde el mismo punto y se desplazan en línea recta, uno hacia el sur con una velocidad constante de 40 km/h y el otro hacia el este con una velocidad constante de 30 km/h. ¿Qué distancia en línea recta habrá entre los dos automóviles al cabo de dos horas?

Solución.

Primero graficamos la situación para tener mayor claridad sobre el problema.



Debemos calcular las distancias recorridas por cada automóvil en las dos horas y luego aplicar el teorema de Pitágoras para hallar la distancia que los separa.

$$d_1 = v_1 \cdot t_1$$

$$d_1 = (40 \text{ km/h})(2 \text{ h})$$

$$d_1 = 80 \text{ km}$$

$$d_2 = v_2 \cdot t_2$$

$$d_2 = (30 \text{ km/h})(2 \text{ h})$$

$$d_2 = 60 \text{ km}$$

$$c^2 = (80 \text{ km})^2 + (60 \text{ km})^2$$

$$\Rightarrow c^2 = 6400 \text{ km}^2 + 3600 \text{ km}^2$$

$$\Rightarrow c^2 = 10\,000 \text{ km}^2$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{10\,000 \text{ km}^2}$$

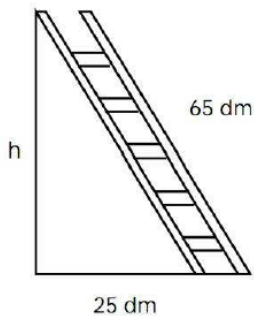
$$\Rightarrow c = 100 \text{ km}$$

R/. En dos horas los automóviles estarán separados 100 km.

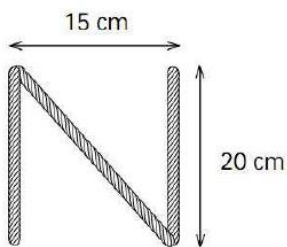
Ejercicios.

1. Una escalera se apoya sobre una pared a una altura de 6 m , si el pie de la escalera se encuentra a 2 m de la base de la pared, determine la longitud aproximada de la escalera.
2. Una escalera de 10 m se apoya sobre una pared a una altura de 5 m , ¿A qué distancia se encuentra el pie de la escalera de la base de la pared?
3. Una escalera de 15 m se apoya sobre una pared. El pie de la escalera se encuentra a 4 m de la base de la pared. Determine la altura aproximada a la que se encuentra apoyada la escalera sobre la pared.
4. Dos automóviles parten al mismo tiempo y desde el mismo punto y se desplazan en línea recta, uno hacia el norte con una velocidad constante de 70 km/h y el otro hacia el oeste con una velocidad constante de 50 km/h . ¿Qué distancia en línea recta habrá entre los dos automóviles al cabo de dos hora?
5. Tres ciudades A, B y C se encuentran ubicadas de tal manera que forman un triángulo rectángulo entre ellas, con el ángulo recto formado en la ciudad A. De la ciudad A a la ciudad B hay 120 km y de la ciudad B a la ciudad C 150 km . ¿Qué distancia hay entre las ciudades A y C?

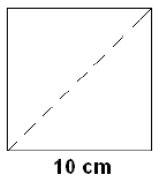
Ejercicio 9. Una escalera de 65 decímetros se apoya en una pared vertical de modo que el pie de la escalera está a 25 decímetros de la pared. ¿Qué altura, en decímetros alcanza la escalera?



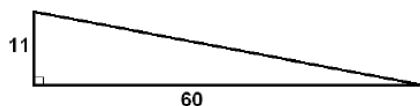
Ejercicio 11. Una letra “N” se ha construido con tres listones de madera; los listones verticales son 20 cm y están separados 15 cm. ¿Cuánto mide el listón diagonal?



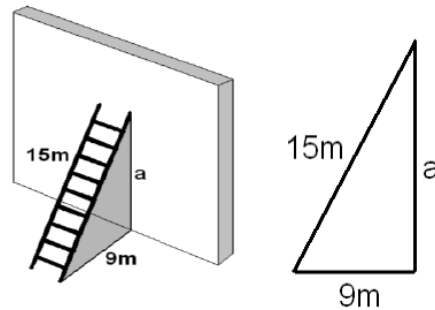
Ejercicio 13. Halla la medida en centímetros, de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 10 cm.



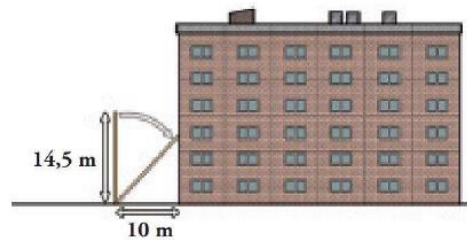
Ejercicio 15. Una rampa de una carretera avanza 60 metros en horizontal para subir 11 metros en vertical. Calcula cuál es la longitud de la carretera.



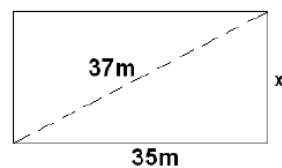
Ejercicio 10. Una escalera de 15 metros se apoya en una pared vertical, de modo que el pie de la escalera se encuentra a 9 metros de esa pared. Calcula la altura, en metros, que alcanza la escalera sobre la pared.



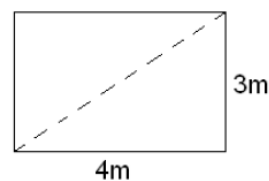
Ejercicio 12. Una escalera de bomberos de 14,5 metros de longitud se apoya en la fachada de un edificio, poniendo el pie de la escalera a 10 metros del edificio. ¿Qué altura, en metros, alcanza la escalera?



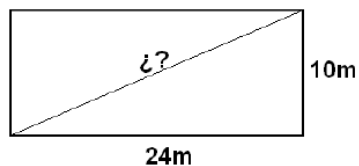
Ejercicio 14. Halla la medida, en centímetros, de la altura de un rectángulo, cuya base mide 35 cm y su diagonal 37 cm:



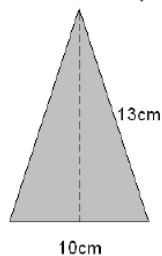
Ejercicio 16. El dormitorio de Pablo es rectangular, y sus lados miden 3 y 4 metros. Ha decidido dividirlo en dos partes triangulares con una cortina que une dos vértices opuestos. ¿Cuántos metros deberá medir la cortina?



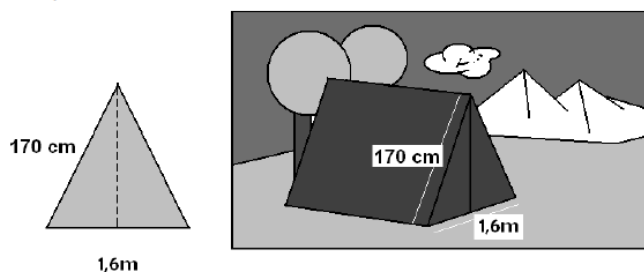
Ejercicio 17. Las dimensiones de un rectángulo son: base=24 m y altura=10m. Calcula la longitud de su diagonal y expresa el resultado en centímetros.



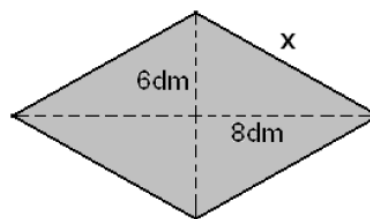
Ejercicio 18. Utiliza el teorema de Pitágoras para hallar la altura de un triángulo isósceles cuya base mide 10 centímetros y sus lados iguales 13 centímetros.



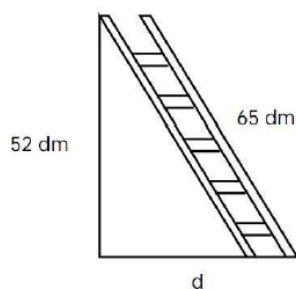
Ejercicio 19. La cara frontal de una tienda de campaña es un triángulo isósceles cuya base mide 1,6 metros y cada uno de los lados iguales mide 170 centímetros. Calcula la altura en centímetros de esa tienda de campaña.



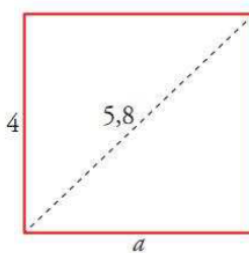
Ejercicio 20. Calcula la medida, en decímetros, de cada lado de un rombo, sabiendo que sus diagonales miden 12 y 16 decímetros.



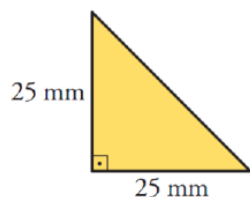
Ejercicio 21. Una escalera de 65 decímetros está apoyada en una pared vertical a 52 decímetros del suelo. ¿A qué distancia se encuentra de la pared el pie de la escalera?



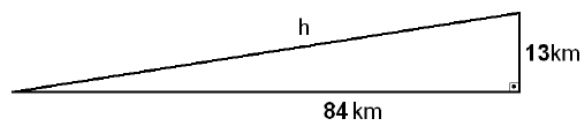
Ejercicio 22. En un rectángulo de altura 4 cm la diagonal es de 5,8 cm. ¿Cuánto mide la base del rectángulo?



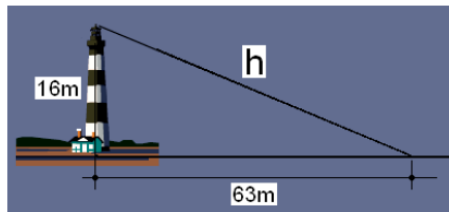
Ejercicio 23. En un triángulo isósceles y rectángulo, los catetos miden 25 milímetros cada uno, ¿Cuál es la medida de su hipotenusa?



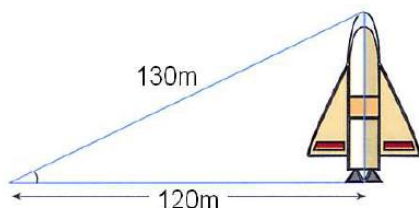
Ejercicio 24. Una rampa tiene una longitud horizontal de 84 kilómetros y un altura de 13 km. ¿Cuál es la longitud de la rampa?



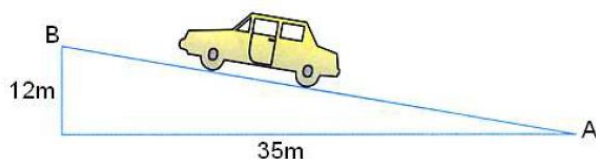
Ejercicio 25. Un faro de 16 metros de altura manda su luz a una distancia horizontal sobre el mar de 63 metros. ¿Cuál es la longitud, en metros, del haz de luz?



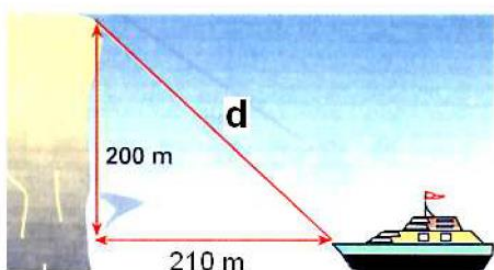
Ejercicio 27. Si nos situamos a 120 metros de distancia de un cohete, la visual al extremo superior del mismo recorre un total de 130 metros. ¿Cuál es la altura total del cohete?



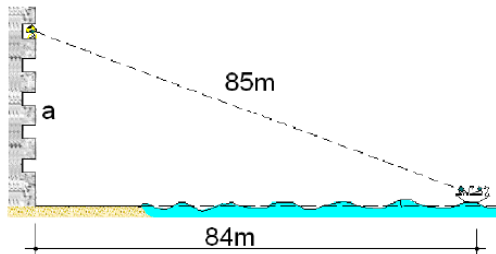
Ejercicio 29. Un coche que se desplaza desde el punto A hasta el punto B recorre una distancia horizontal de 35 metros, mientras se eleva una altura de 12 metros. ¿Cuál es la distancia, en metros, que separa a los puntos A y B?



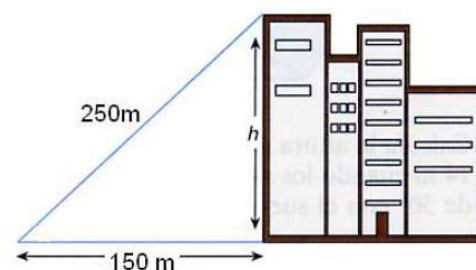
Ejercicio 31. Desde un acantilado de 200 metros de altura se observa un barco que se encuentra a 210 metros de dicho acantilado. ¿Qué distancia, en metros, recorre la visual desde el acantilado hasta el barco?



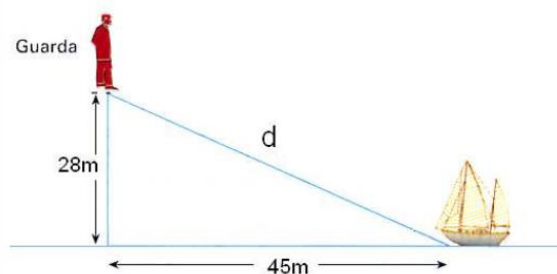
Ejercicio 26. Desde un balcón de un castillo en la playa se ve un barco a 85 metros, cuando realmente se encuentra a 84 metros del castillo. ¿A qué altura se encuentra ese balcón?



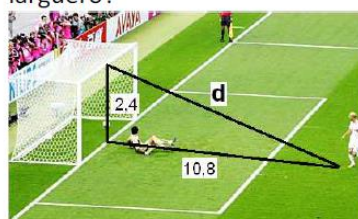
Ejercicio 28. Si nos situamos a 150 metros de distancia de un rascacielos, la visual al extremo superior del mismo recorre un total de 250 metros. ¿Cuál es la altura total del rascacielos?



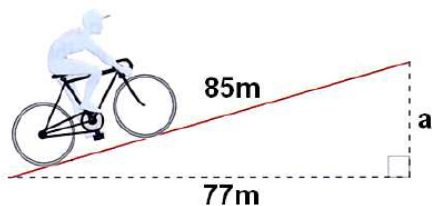
Ejercicio 30. Un guardacostas observa un barco desde una altura de 28 metros. El barco está a una distancia horizontal del punto de observación de 45 metros. ¿Cuál es la longitud, en metros, de la visual del guardacostas al barco?



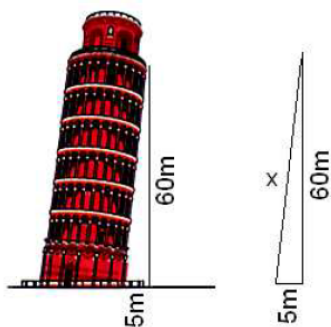
Ejercicio 32. La altura de una portería de fútbol reglamentaria es de 2,4 metros y la distancia desde el punto de penalti hasta la raya de gol es de 10,8 metros. ¿Qué distancia recorre un balón que se lanza desde el punto de penalti y se estrella en el punto central del larguero?



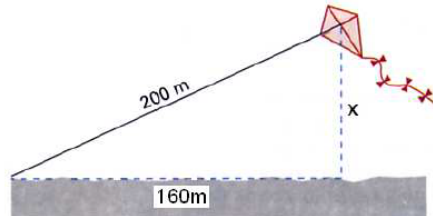
Ejercicio 33. En una rampa inclinada, un ciclista avanza una distancia real de 85 metros mientras avanza una distancia horizontal de tan solo 77 metros. ¿Cuál es la altura, en metros, de esa rampa?



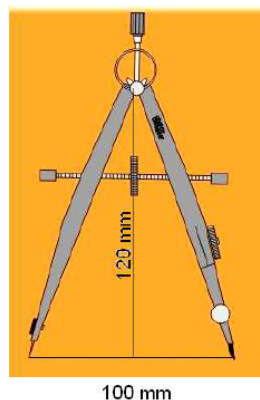
Ejercicio 35. La Torre de Pisa está inclinada de modo que su pared lateral forma un triángulo rectángulo de catetos 5 metros y 60 metros. ¿Cuánto mide la pared lateral?



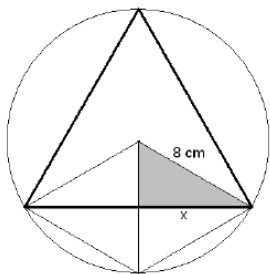
Ejercicio 34. Una cometa está atada al suelo con un cordel de 200 metros de longitud. Cuando la cuerda está totalmente tensa, la vertical de la cometa al suelo está a 160 metros del punto donde se ató la cometa. ¿A qué altura está volando la cometa?



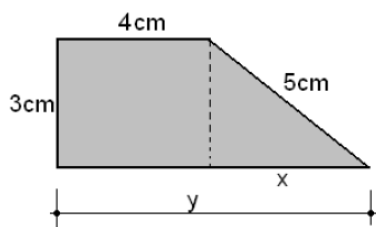
Ejercicio 36. Un compás de bigotera tiene separadas las puntas de sus patas 100 milímetros, mientras que la vertical desde el eje hasta el papel alcanza una altura de 120 milímetros. ¿Cuál es la medida, en milímetros, de cada una de sus patas?



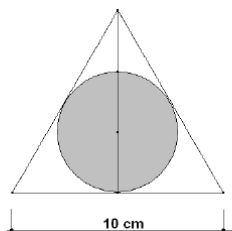
Ejercicio 45. Calcula el lado de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio 8 cm, como la de la figura.



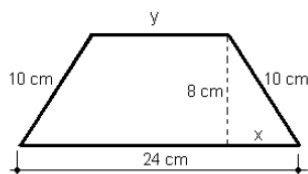
Ejercicio 46. Calcula el perímetro de este trapecio rectángulo.



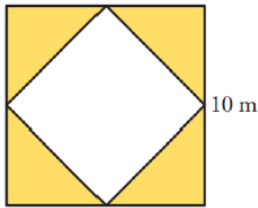
Ejercicio 47. En un triángulo equilátero de 10 centímetros de lado se inscribe una circunferencia. Calcula el radio de la circunferencia, sabiendo que es la tercera parte de la altura del triángulo.



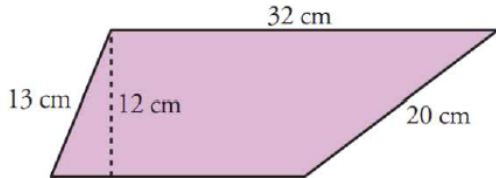
Ejercicio 48. Calcula el perímetro de este trapecio isósceles.



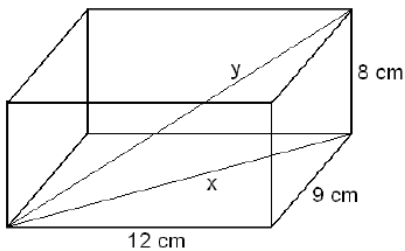
Ejercicio 51. En un cuadrado de lado 10 centímetros se inscribe otro más pequeño que apoya sus vértices en los puntos medios de los lados del cuadrado mayor. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado menor?



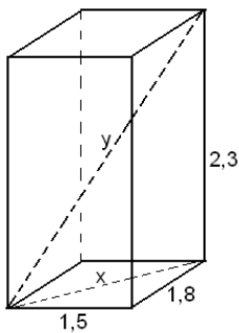
Ejercicio 52. Halla el perímetro del trapecio de la figura.



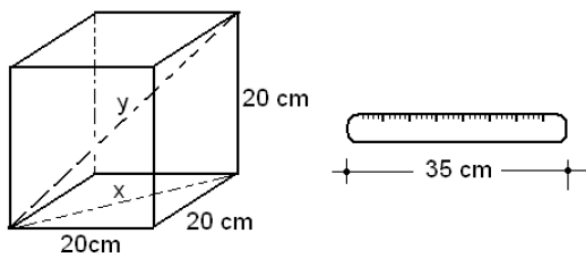
Ejercicio 69. Halla la medida de la diagonal de la base (x) y la medida de la diagonal del ortoedro (y)



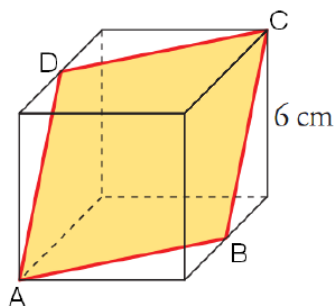
Ejercicio 70. Vicente ha comprado una caña de pescar de 3,25 metros de largo. Cuando llega a su casa intenta meterla en el ascensor, cuyas medidas son 1,5 metros de ancho, 1,8 metros de fondo y 2,3 metros de alto. ¿Conseguirá su propósito sin doblar la caña?



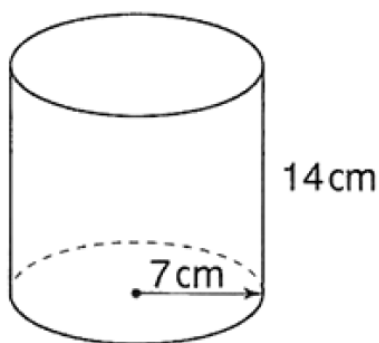
Ejercicio 71. ¿Es posible guardar una regla de madera de 35 centímetros en una caja con forma cúbica de 20 centímetros de lado, sin que sobresalga nada?



Ejercicio 73. En un cubo de 6 centímetros de arista se inscribe un rombo ABCD, apoyando sus vértices B y D sobre los puntos medios de dos aristas opuestas. Halla la medida, en centímetros, de cada uno de los lados del rombo.



Ejercicio 84. El cilindro de la figura representa un bote para lápices. ¿Cuál es la medida del mayor lápiz que cabe en el bote sin sobresalir del mismo?



Ejercicio 78. En un cono recto de altura h y generatriz g , ¿cuál es la expresión del radio r de la base, en función de h y g ?

