



**INSTITUCIÓN EDUCATIVA “CECILIA DE LLERAS”**  
Reconocida por Resolución N°.001089 de Sep.20 de  
2002 y Ratificada por Resolución No.0757 del 12 de Junio de 2009  
Ratificación de la implementación de la Jornada Única por resolución  
No. 0486 de 27 de febrero de 2015. DANE: 123001002478 – NIT: 800.175.499-4  
Montería – Córdoba

## FORMATO INSTITUCIONAL – GUÍA DE APRENDIZAJE

| GUÍA DE APRENDIZAJE                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                      |                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|-----------------------------|
| ÁREA/ASIGNATURA: ESTADÍSTICA                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | DOCENTE: ELKIN TORRES RIVERA, MARÍA TERESA HERRERA, LORENA REVUELTAS |                             |
| GRUPO(S): 8° 1,2,3,4,5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | UNIDAD: 1                                                            | TIEMPO: 23 al 27 de febrero |
| PROPÓSITO(S) DE APRENDIZAJE: Identifica variables estadísticas, recolecta, y organiza información proveniente de diversas fuentes en tablas de frecuencias para datos no agrupados.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                      |                             |
| <b>PROPÓSITO(S) ESPECÍFICOS:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Organiza e interpreta la información suministrada sobre el estudio de una variable.</li><li>• Determina y analiza las distintas frecuencias para datos no agrupados en un estudio estadístico.</li><li>• Elabora tablas de frecuencia a partir de un conjunto de datos.</li></ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                      |                             |
| NOMBRE DE LA UNIDAD: Estadística descriptiva                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                      |                             |
| TEMA(S): Tablas de frecuencia para datos no agrupados                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                      |                             |
| <b>LO QUE DEBO SABER - EXPLORACIÓN</b> <p>Aquí tendrás la oportunidad de saber cuáles son los conceptos que necesitas tener claros para poder desarrollar los aprendizajes que se van a tratar en esta guía.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                      |                             |
| <b>Escribe los siguientes conceptos y ejemplos en tu cuaderno, se revisará una vez retornemos a la presencialidad.</b> <p style="text-align: center;"><b>Estadística descriptiva</b></p> <p>La <b>estadística descriptiva</b> se puede definir como la ciencia encargada de recopilar, organizar e interpretar datos numéricos (cuantitativos) o cualitativos.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>▪ <b>Población:</b> Una población es un grupo de elementos o de individuos sobre el que se hará un estudio.</li><li>▪ <b>Muestra:</b> Una muestra es una parte representativa de la población</li><li>▪ <b>Variable:</b> es una propiedad o característica de un conjunto de elementos que puede ser objeto de estudio.</li><li>▪ <b>Variable cualitativa:</b> si la respuesta a la pregunta corresponde a una cualidad, gusto o preferencia.</li><li>▪ <b>Variable cuantitativa:</b> si la respuesta corresponde a un dato numérico.</li></ul> <p>Realiza en tu cuaderno:</p> <p>Observa el siguiente vídeo, luego escribe en el cuaderno los ejemplos que se realizan.<br/><a href="https://www.youtube.com/watch?v=BEE2BYI9EZg&amp;t=116s">https://www.youtube.com/watch?v=BEE2BYI9EZg&amp;t=116s</a></p> |                                                                      |                             |

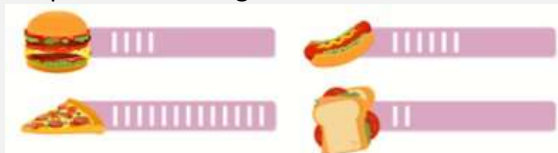


## FORMATO INSTITUCIONAL – GUÍA DE APRENDIZAJE

Analicemos los siguientes ejemplos:

### Ejemplo 1.

Los profesores de grado séptimo están organizando una tarde recreativa para sus estudiantes y necesitan saber que prefieren de refrigerio. Las opciones son: hamburguesa, pizza, *hot dog* y emparedado. Para esto, hacen el conteo escribiendo un palito al lado de cada opción. Revisemos los resultados en el curso séptimo A que aparecen en la siguiente tabla.



Esta información la podemos organizar en una **tabla de acuerdo a su frecuencia absoluta** de la siguiente manera.

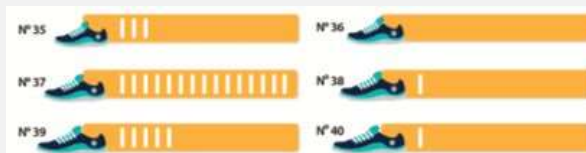
| Preferencia  | Frecuencia |
|--------------|------------|
| Hamburguesa  | 4          |
| Hot dog      | 6          |
| Pizza        | 13         |
| Emparedado   | 2          |
| <b>Total</b> | <b>25</b>  |

TABLA 1

Al total de estudiantes encuestados lo llamaremos **población** y al tipo de refrigerio (LO QUE SE PREGUNTA) lo llamaremos **variable**. En este caso, la variable se llama **variable cualitativa** porque representa una cualidad, preferencia o gusto que **NO se puede** medir con números.

### Ejemplo 2.

A los mismos estudiantes del ejemplo anterior se les preguntó la talla de calzado de cada uno. Observemos los resultados.



Esta información la podemos organizar en una **tabla de frecuencia** de la siguiente manera.

| Talla        | Frecuencia |
|--------------|------------|
| 35           | 3          |
| 36           | 0          |
| 37           | 15         |
| 38           | 1          |
| 39           | 5          |
| 40           | 1          |
| <b>Total</b> | <b>25</b>  |

TABLA 2

La talla del calzado es una **variable cuantitativa** porque se representa con números.

### Tipos de frecuencias

Como se observó en los dos ejemplos anteriores, la **Frecuencia absoluta** es el número de veces que se repite un dato.

La **frecuencia relativa** representa la parte del total de datos que corresponde a una característica o propiedad analizada. Se encuentra dividiendo la **frecuencia absoluta** entre el total de datos analizados. Por ejemplo, si queremos



## FORMATO INSTITUCIONAL – GUÍA DE APRENDIZAJE

resaltar la distribución de los niños de acuerdo con su refrigerio preferido podríamos añadir una columna a la tabla de frecuencia del ejemplo 1, la cual llamaríamos **frecuencia relativa (VER TABLA 3)**. La frecuencia relativa de niños que prefieren hamburguesa sería  $4 \div 25 = 0,16$  y la **frecuencia porcentual**, es decir, la relativa multiplicada por cien, 16 %. La frecuencia de niños que prefieren perro caliente sería  $6 \div 25 = 0,24$  y la porcentual 24 %.

Del mismo modo, las frecuencias **acumuladas** suman o totalizan los datos anteriores de la frecuencia correspondiente.

### Tabla de frecuencias

Las frecuencias se pueden disponer en columnas para comparar los datos entre sí o con otro conjunto de datos relacionados. Si realizamos la tabla con los datos del primer ejemplo sería:

| Preferencia  | Frecuencia absoluta<br>$f_i$ | F.absoluta Acumulada<br>$F_i$ | Frecuencia relativa<br>$h_i$ | F.relativa Acumulada<br>$H_i$ | Porcentaje<br>$h_i\%$    |
|--------------|------------------------------|-------------------------------|------------------------------|-------------------------------|--------------------------|
| Hamburguesa  | 4                            | 4                             | $(4 \div 25) = 0,16$         | 0,16                          | $0,16 \times 100 = 16\%$ |
| Hot dog      | 6                            | $4+6=10$                      | $(6 \div 25) = 0,24$         | $0,16+0,24=0,40$              | 24%                      |
| Pizza        | 13                           | $4+6+13=23$                   | $(13 \div 25)=0,52$          | $0,40+0,52=0,92$              | 52%                      |
| Emparedado   | 2                            | 25                            | 0,08                         | 0,92                          | 8%                       |
| <b>Total</b> | 25                           |                               | 1                            |                               | 100%                     |

Completa las frecuencias que faltan en la tabla y verifique que la suma de las frecuencias relativas sea igual a 1 y el total del porcentaje igual a 100 %.

Observa el vídeo: <https://www.youtube.com/watch?v=HIQO0zMnYAo>

### LO QUE ESTOY APRENDIENDO

En esta parte de la guía encontrarás actividades y ejercicios que te permitirán apropiarte de los conceptos de esta primera Unidad y ponerlos en práctica.

ESTAS ACTIVIDADES DEBEN REALIZARSE EN EL CUADERNO, TODO EL GRADO 8, SE REVISARÁN UNA VEZ RETORNEMOS A CLASE, SU ENVÍO POR CORREO PARA LOS GRUPOS 3,4 Y 5 ES OPCIONAL. EN CASO DE QUERER HACERLO, DEBERÁ ENVIARSE EN UN SOLO CORREO CON LAS ACTIVIDADES DE LA SIGUIENTE SECCIÓN “¿CÓMO SÉ QUÉ APRENDÍ?”.

#### Actividad de apropiación 1

Clasifique cada variable en cualitativa o cuantitativa.

- El número de semáforos que hay en el recorrido de un auto por la ciudad. \_\_\_\_\_
- La marca de automóvil preferida. \_\_\_\_\_
- La cantidad de manchas que hay en un  $m^2$  de tela. \_\_\_\_\_
- La procedencia de una persona. \_\_\_\_\_
- El ingreso mensual de una familia. \_\_\_\_\_



## FORMATO INSTITUCIONAL – GUÍA DE APRENDIZAJE

### Actividad de apropiación 2

Los datos que aparecen a continuación representan la estatura en centímetros de los alumnos de grado séptimo.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 120 | 130 | 122 | 120 | 121 | 123 | 120 | 122 | 130 | 120 |
| 121 | 120 | 123 | 123 | 120 | 120 | 122 | 123 | 130 | 125 |

- a. Ordene los datos en una tabla de recuento.      c. Complete la tabla de frecuencias.

Como en los primeros ejemplos

|     |  |
|-----|--|
| 120 |  |
| 121 |  |
| 122 |  |
| 123 |  |
| 125 |  |
| 130 |  |

| Estatura (cm) | Frecuencia |
|---------------|------------|
| 120           | 7          |
|               |            |
|               |            |
|               |            |
|               |            |
|               |            |

- b. ¿Qué tipo de variable se estudia en la anterior situación?

### Actividad de apropiación 3

Elija la tabla de frecuencias que representa los resultados de la votación.

Los estudiantes de un curso votaron para escoger el día de la semana en que harán una salida pedagógica y los resultados fueron:

|         |           |         |           |        |           |         |           |        |           |
|---------|-----------|---------|-----------|--------|-----------|---------|-----------|--------|-----------|
| Viernes | Viernes   | Viernes | Miércoles | Martes | Miércoles | Lunes   | Martes    | Martes | Lunes     |
| Jueves  | Miércoles | Viernes | Miércoles | Martes | Miércoles | Viernes | Miércoles | Martes | Miércoles |

A.

| Día       | Votos |
|-----------|-------|
| Lunes     | 2     |
| Martes    | 3     |
| Miércoles | 2     |
| Jueves    | 1     |
| Viernes   | 6     |

B.

| Día       | Votos |
|-----------|-------|
| Lunes     | 2     |
| Martes    | 5     |
| Miércoles | 7     |
| Jueves    | 1     |
| Viernes   | 5     |

C.

| Día       | Votos |
|-----------|-------|
| Lunes     | 1     |
| Martes    | 2     |
| Miércoles | 3     |
| Jueves    | 4     |
| Viernes   | 5     |



## FORMATO INSTITUCIONAL – GUÍA DE APRENDIZAJE

### ¿CÓMO SÉ QUÉ APRENDÍ?

(Estas son las actividades a resolver y que enviarás a tu docente como evidencia de aprendizaje)

**ESTAS ACTIVIDADES DEBEN ENVIARSE A LOS CORREOS DE LOS DOCENTES (SOLO LOS GRUPOS 3, 4 Y 5), SIGUIENDO LAS INSTRUCCIONES QUE ESTÁN AL FINAL DE ESTE DOCUMENTO. LOS GRUPOS 8°1 Y 8°2 DEBEN REALIZARLOS EN EL CUADERNO Y PRESENTARLO AL DOCENTE EL DÍA QUE CORRESPONDA CLASES.**

#### **Actividad entregable 1**

a. Complete la tabla de distribución de frecuencias.

Los datos que aparecen a continuación representan la estatura en centímetros de los estudiantes de grado séptimo (USAR LOS DATOS DE LA ACTIVIDAD 2).

| Estatura (cm) | F. absoluta fi | F. abs. Acumulada Fi | F. relativa hi | F.relativa acumulada Hi | f. porcentual % |
|---------------|----------------|----------------------|----------------|-------------------------|-----------------|
| 120           |                |                      |                |                         |                 |
| 121           | 2              | 9                    |                |                         |                 |
| 122           |                |                      | $3/20=0,15$    |                         |                 |
| 123           | 4              |                      |                | 0,8                     |                 |
| 125           | 1              |                      |                |                         | 85%             |
| 130           |                | 20                   |                |                         |                 |
| Total         | 20             |                      |                |                         |                 |

b. Responda las siguientes preguntas:

- ¿Qué porcentaje de estudiantes miden 122 cm? \_\_\_\_\_
- ¿Qué porcentaje de estudiantes miden menos de 123 cm? \_\_\_\_\_
- ¿Qué porcentaje de estudiantes miden 123 cm o 125 cm? \_\_\_\_\_
- ¿Qué porcentaje de estudiantes miden más de 121 cm? (total) \_\_\_\_\_

#### **Actividad entregable 2**

50 alumnos de una universidad presentaron un examen de matemáticas y obtuvieron las siguientes notas (en una escala de 0 a 5 y con nota mínima aprobatoria de 3):

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 2 | 4 | 2 | 5 | 4 | 5 | 3 | 5 | 5 |
| 4 | 5 | 5 | 2 | 1 | 5 | 3 | 5 | 4 | 5 |
| 2 | 2 | 4 | 0 | 2 | 4 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| 3 | 4 | 3 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 5 | 3 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 5 | 5 | 3 | 4 | 2 |



## FORMATO INSTITUCIONAL – GUÍA DE APRENDIZAJE

a. Organice los datos y complete la siguiente tabla de distribución de frecuencias.

| Nota  |  |  |  |  |  |
|-------|--|--|--|--|--|
|       |  |  |  |  |  |
|       |  |  |  |  |  |
|       |  |  |  |  |  |
|       |  |  |  |  |  |
|       |  |  |  |  |  |
|       |  |  |  |  |  |
| Total |  |  |  |  |  |

b. Con base en la tabla anterior, responda las siguientes preguntas.

- ¿Cuántos estudiantes aprobaron el examen de matemáticas?
- ¿Cuántos estudiantes no aprobaron el examen?
- ¿Qué porcentaje de estudiantes obtuvieron la nota mínima?
- ¿Cuál es la nota a la que corresponde una frecuencia relativa de 0,18?
- ¿Cuál es la nota a la que corresponde una frecuencia relativa de  $(10 \div 50)$ ?

### CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- ✓ Demuestra interés en la apropiación de los aprendizajes en los encuentros sincrónicos y/o horarios de atención.
- ✓ Desarrolla y entrega las actividades asignadas de acuerdo a las instrucciones y tiempos establecidos.
- ✓ Resuelve las actividades de manera organizada detallando cada paso del procedimiento para llegar a su solución.
- ✓ Presenta el cuaderno al día con las actividades de apropiación desarrolladas en el retorno a la presencialidad.



**INSTITUCIÓN EDUCATIVA “CECILIA DE LLERAS”**  
Reconocida por Resolución N°.001089 de Sep.20 de  
2002 y Ratificada por Resolución No.0757 del 12 de Junio de 2009  
Ratificación de la implementación de la Jornada Única por resolución  
No. 0486 de 27 de febrero de 2015. DANE: 123001002478 – NIT: 800.175.499-4  
Montería – Córdoba

## FORMATO INSTITUCIONAL – GUÍA DE APRENDIZAJE

### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS DE APOYO PARA EL ESTUDIANTE

CONSTRUCCIÓN DE TABLA DE FRECUENCIAS PASO A PASO

[https://www.fisimat.com.mx/tablas-de-frecuencias-para-datos-no-agrupados-ejercicios-resueltos/#google\\_vignette](https://www.fisimat.com.mx/tablas-de-frecuencias-para-datos-no-agrupados-ejercicios-resueltos/#google_vignette)

VÍDEO EXPLICATIVO

<https://www.youtube.com/watch?v=pqHfGKKz45Y&t=305s>

**MATERIAL PDF ANEXO (AL FINAL)** Elaborado por el profesor Elkin Torres. CON ESTE TODOS LOS GRUPOS PUEDEN AMPLIAR LA INFORMACIÓN DE LAS TEMÁTICAS **DEL AÑO**. CUENTA CON EJERCICIOS.

### ASÍ ENVÍO MIS EVIDENCIAS

#### LEER LAS INSTRUCCIONES HASTA EL FINAL

Los grupos **8°1 y 8°2**, a cargo de la orientación del profesor Elkin Torres Rivera, deben desarrollar las actividades de esta guía en el cuaderno y presentarlas en el primer encuentro presencial que tengan. Del mismo modo, deben leer y tratar de comprender lo correspondiente al capítulo 1 del documento anexo (siguiente página).

Para el grupo **8°3** Enviar al correo [lrevueltas@iececiliadelleras.edu.co](mailto:lrevueltas@iececiliadelleras.edu.co), de la profesora Lorena Revueltas. Línea de atención solo por MENSAJE Whatsapp a +57 312 8590651, de 6:30 am hasta las 12:30pm.

Los grupos **8°4 y 8°5** deben enviar al correo [mtherrera@iececiliadelleras.edu.co](mailto:mtherrera@iececiliadelleras.edu.co), de la profesora María Teresa Herrera. Línea de atención por MENSAJE Whatsapp +57 314 5375030, de 6:30 am hasta las 12:30pm.

En el correo deben adjuntar las fotos de las actividades como imágenes o en un archivo PDF, Pueden usar la aplicación CamScanner. Con las actividades ENTREGABLES desarrolladas en su totalidad, de forma organizada y legible, por favor verificar que todo se entienda. Indicar en el asunto del correo:

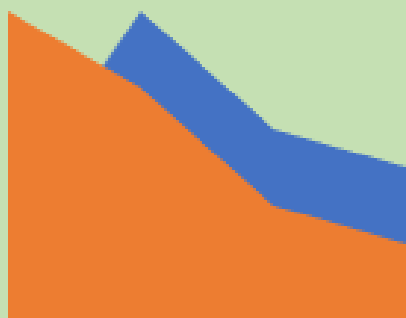
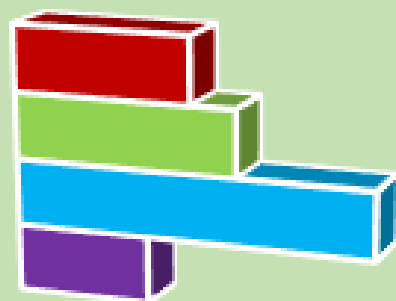
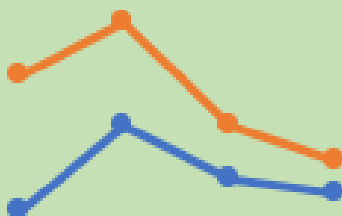
Guía 1 Estadística\_80X\_APELLIDOS\_NOMBRES → En la X va el número del grupo de su grado.

**Ejemplo:**

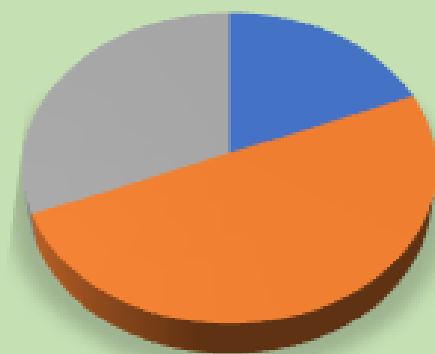
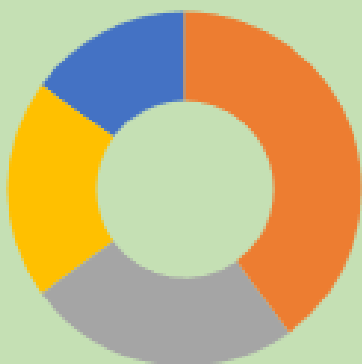
**Asunto: Guía 1 Matemáticas\_803\_REVUELTAS UBARNE LORENA SOFÍA**

**LA FECHA PARA ENVIAR LAS ACTIVIDADES DE ESTA GUÍA ES EL 27 DE FEBRERO DE 2026, CON PLAZO MÁXIMO HASTA EL 01 DE MARZO DE 2026 A MEDIANOCHE.**

# COMPONENTE ALEATORIO



Mtr. Elkin Torres Rivera



Montería  
2026

# Índice general

|                                                                        |          |
|------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA</b>                                      | <b>1</b> |
| 1.1. Conceptos básicos . . . . .                                       | 1        |
| 1.1.1. Población . . . . .                                             | 1        |
| 1.1.2. Muestra . . . . .                                               | 1        |
| 1.1.3. Variable . . . . .                                              | 1        |
| 1.1.4. Dato . . . . .                                                  | 3        |
| 1.2. Distribución de frecuencias . . . . .                             | 3        |
| 1.2.1. Frecuencia absoluta . . . . .                                   | 3        |
| 1.2.2. Frecuencia absoluta acumulada . . . . .                         | 3        |
| 1.2.3. Frecuencia relativa . . . . .                                   | 3        |
| 1.2.4. Frecuencia relativa acumulada . . . . .                         | 4        |
| 1.2.5. Frecuencia porcentual . . . . .                                 | 4        |
| 1.2.6. Frecuencia porcentual acumulada . . . . .                       | 4        |
| 1.3. Análisis de variables cualitativas. . . . .                       | 4        |
| 1.3.1. Diagrama de pastel o circular. . . . .                          | 4        |
| 1.3.2. Diagrama de barras. . . . .                                     | 5        |
| 1.4. Análisis de variables cuantitativas. . . . .                      | 10       |
| 1.4.1. Datos sin agrupar. . . . .                                      | 10       |
| 1.4.2. Histograma de frecuencias. . . . .                              | 11       |
| 1.4.3. Polígono de frecuencias. . . . .                                | 11       |
| 1.4.4. Diagrama de caja y bigotes (Boxplot). . . . .                   | 11       |
| 1.4.5. Medidas de tendencia central para datos sin<br>agrupar. . . . . | 12       |

|           |                                                            |           |
|-----------|------------------------------------------------------------|-----------|
| 1.4.6.    | Medidas de dispersión para datos sin agrupar. . .          | 13        |
| 1.4.7.    | Medidas de posición para datos sin agrupar. . .            | 14        |
| 1.4.8.    | Datos agrupados. . . . .                                   | 24        |
| 1.4.9.    | Medidas de tendencia central para datos agrupados. . . . . | 24        |
| 1.4.10.   | Medidas de dispersión para datos agrupados. . . . .        | 26        |
| 1.4.11.   | Medidas de posición para datos agrupados. . . .            | 26        |
| <b>2.</b> | <b>TÉCNICAS DE CONTEO</b>                                  | <b>40</b> |
| 2.1.      | Definición de $n!$ . . . . .                               | 40        |
| 2.2.      | Regla del producto o principio multiplicativo. . . . .     | 40        |
| 2.3.      | Regla de la suma. . . . .                                  | 41        |
| 2.4.      | Permutaciones y combinaciones. . . . .                     | 42        |
| 2.4.1.    | Permutaciones. . . . .                                     | 42        |
| 2.4.2.    | Combinaciones. . . . .                                     | 46        |
| <b>3.</b> | <b>PROBABILIDAD</b>                                        | <b>52</b> |
| 3.1.      | Experimento aleatorio. . . . .                             | 52        |
| 3.2.      | Suceso o evento. . . . .                                   | 53        |
| 3.3.      | Operaciones con sucesos. . . . .                           | 53        |
| 3.3.1.    | Intersección de eventos. . . . .                           | 53        |
| 3.3.2.    | Unión de eventos. . . . .                                  | 54        |
| 3.3.3.    | Diferencia de eventos. . . . .                             | 54        |
| 3.3.4.    | Complemento de un evento. . . . .                          | 55        |
| 3.3.5.    | Eventos mutuamente excluyentes. . . . .                    | 55        |
| 3.3.6.    | Eventos colectivamente exhaustivos. . . . .                | 56        |
| 3.4.      | Probabilidad. . . . .                                      | 56        |
| 3.4.1.    | Axiomas de probabilidad . . . . .                          | 58        |
| 3.4.2.    | Teoremas de probabilidad . . . . .                         | 58        |
| 3.4.3.    | Probabilidad condicional. . . . .                          | 61        |
| 3.4.4.    | Sucesos independientes y sucesos dependientes. . . . .     | 63        |

|        |                                           |    |
|--------|-------------------------------------------|----|
| 3.4.5. | Diagrama de árbol. . . . .                | 66 |
| 3.4.6. | Teorema de la probabilidad total. . . . . | 66 |
| 3.4.7. | Teorema de Bayes. . . . .                 | 68 |

## **Introducción.**

La estadística se ha convertido en un pilar fundamental de los procesos llevados a cabo en un sinnúmero de empresas, entidades, instituciones de todo tipo. Permite comprender la información relevante sobre algún aspecto de una forma más práctica y sencilla. El número de usuarios de esta disciplina ha aumentado de forma exponencial debido a su enorme aplicación en la toma de decisiones basadas en el fundamento teórico y práctico de sus métodos.

En los procesos escolares se aplican conceptos básicos y procedimientos de estadística descriptiva, técnicas de conteo y probabilidad, los cuales son objeto de estudio del presente escrito. Atendiendo a los Estándares básicos de competencias y Derechos básicos de aprendizaje emanados por el Ministerio de Educación Nacional, se plantean diversos contextos en los que la aplicación de estos métodos conllevan al desarrollo del pensamiento aleatorio en los estudiantes.

El pensamiento aleatorio se apoya directamente en conceptos y procedimientos de la teoría de probabilidades y de la estadística inferencial, e indirectamente en la estadística descriptiva y en la combinatoria (Ministerio de Educación Nacional, 2006).

Se plantean conceptos, ejemplos y ejercicios que facilitan la comprensión del estudiante y contribuyen a la ejercitación y capacidad de resolver situaciones en diferentes áreas del conocimiento y en diversos contextos.

# COMPONENTE ALEATORIO

Mtr. Elkin Torres Rivera

Montería

2025

# Capítulo 1

## ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

### 1.1. Conceptos básicos

La estadística descriptiva es una rama de la estadística que se encarga de la recolección, organización, representación gráfica y análisis descriptivo de un conjunto de datos. Un estudio estadístico requiere de ciertos elementos sin los cuales no se podría llevar a cabo. Dentro de estos elementos encontramos la población, la muestra, las variables y los datos.

#### 1.1.1. Población

Es el conjunto de individuos, objetos o sucesos a los cuales se realiza un estudio estadístico. El tamaño de la población se representa con  $N$ .

#### 1.1.2. Muestra

Es un subconjunto de la población del cual se extraen los datos. El tamaño de la población se representa con  $n$ .

#### 1.1.3. Variable

Es una característica o cualidad de los elementos de la población o muestra. Existen diferentes tipos de variables.

- **Variable cualitativa o categórica:** Corresponde a un atributo, cualidad o preferencia de los elementos de la población o muestra.
- **Variable cuantitativa:** Corresponde a características que se pueden cuantificar, es decir, se le puede asignar una cantidad numérica, por lo cual se pueden realizar operaciones como suma, resta, multiplicación, calcular promedios, etc. Se clasifican en **Variable cuantitativa discreta** (el conjunto de los posibles valores es finito o infinito contable, sus valores son enteros. Por ejemplo, el número de hijos en una familia, el número de accidentes en un día, etc...); y **Variable cuantitativa continua** (el conjunto de los posibles valores de la variable es un intervalo, se le puede asignar números decimales. Por ejemplo, la estatura, la masa, etc...)

#### Niveles de medición de las variables.

Las variables poseen niveles de medición dependiendo de su naturaleza.

- **El nivel nominal:** La variable presenta un nivel nominal cuando sus categorías no posee un orden específico. Por ejemplo, el color de los ojos, el estado civil, preferencia por un género musical, etc...).
- **El nivel ordinal:** En este caso la variable posee un orden específico en sus categorías. Por ejemplo, el desempeño de un estudiante con categorías Bajo, Básico, Alto y Superior o el tamaño de un objeto con categorías Pequeño, Mediano y Grande, etc...).
- **El nivel de intervalo:** En este nivel la variable es cuantitativa y el cero no representa ausencia de la característica, por ejemplo, la temperatura, el cero indica un valor de la temperatura y no significa que no haya temperatura.
- **El nivel de razón:** Este nivel es para variables cuantitativas y aquí se puede establecer en qué proporción un valor es mayor o menor que otro. Ejemplo, la masa y la estatura.

#### 1.1.4. Dato

Es un valor que toma la variable de estudio, puede ser un número, una categoría, un símbolo o una palabra. Para representar los datos se usa  $x_i$ . Por ejemplo, para la variable **color de ojos** un dato es **verde**, para la variable **estatura** un dato es **1.75 m**.

### 1.2. Distribución de frecuencias

Al recolectar los datos se pueden organizar en tablas llamadas tablas de frecuencias o distribución de frecuencias. Existen diversos tipos de frecuencias, las cuales se detallan a continuación.

#### 1.2.1. Frecuencia absoluta

Corresponde a la cantidad de veces que se repite cada dato diferente. Se representa como  $f_i$ , con  $i$  variando desde 1 hasta  $m$  donde  $m$  es el número de datos diferentes.

#### 1.2.2. Frecuencia absoluta acumulada

Corresponde a la suma de las frecuencias absolutas hasta cierto dato. Se representa como  $F_i$ . Entonces,

$$F_i = \sum_{i=1}^m f_i \quad (1.1)$$

#### 1.2.3. Frecuencia relativa

La frecuencia relativa de un dato se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta ( $f_i$ ) del dato entre el tamaño de la muestra ( $n$ ). Se representa con  $h_i$ . Entonces,  $h_i = \frac{f_i}{n}$ .

#### **1.2.4. Frecuencia relativa acumulada**

Corresponde a la suma de las frecuencias relativas hasta cierto dato. Se representa como  $H_i$ . Entonces,

$$H_i = \sum_{i=1}^m h_i \quad (1.2)$$

.

#### **1.2.5. Frecuencia porcentual**

Corresponde a la frecuencia relativa multiplicada por 100. Se representa con  $h_i \%$ . Entonces,  $h_i \% = h_i \cdot 100 \%$ .

#### **1.2.6. Frecuencia porcentual acumulada**

Corresponde a la frecuencia relativa acumulada multiplicada por 100. Se representa con  $H_i \%$ . Entonces,  $H_i \% = H_i \cdot 100 \%$ .

### **1.3. Análisis de variables cualitativas.**

Ya se habló de forma general de las variables cualitativas o categóricas. Ahora, se estudiarán tablas de frecuencias y gráficos que se utilizan para representar información sobre este tipo de variables. Los gráficos más comunes usados en este caso son los diagramas circulares (sectores, torta o pastel) y los diagramas de barras.

#### **1.3.1. Diagrama de pastel o circular.**

Es un diagrama en forma de círculo que se utiliza para representar variables categóricas con pocas categorías (Por lo general 5 o menos). El área total del círculo se divide en sectores proporcionales a las frecuencias porcentuales de las categorías. Para realizar un diagrama de pastel las frecuencias porcentuales

de cada categoría se convierten a grados de forma proporcional para construir el sector circular correspondiente.

### 1.3.2. Diagrama de barras.

Es un diagrama que se utiliza por lo general para representar variables categóricas, este consta de un semieje horizontal y un semieje vertical, en uno de los semiejes se escribe la variable con sus categorías y en el otro las frecuencias absolutas o porcentuales.

**Ejemplo.** En el grado décimo de la Institución Educativa Cecilia de Lleras de Montería se realizó una encuesta a 50 estudiantes donde se consultó sobre la preferencia por ciertos deportes. Los resultados fueron los siguientes: 15 estudiantes prefieren el fútbol, 10 prefieren el baloncesto, 12 prefieren el Rugby, 8 prefieren el béisbol y 5 prefieren el voleibol. Teniendo en cuenta la información anterior, determine: la población, la muestra, la variable, el tipo de variable, construya una tabla de frecuencias y elabore un diagrama circular y uno de barras.

### **Solución.**

**Población.** La población corresponde a todos los estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Cecilia de Lleras de Montería.

**Muestra.** Corresponde a los 50 estudiantes encuestados.

**Variable.** Corresponde a la preferencia por algún deporte.

**Tipo de variable.** Esta es una variable cualitativa nominal.

Tabla 1.1: Tabla de frecuencias.

| Deporte    | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ | $h_i \%$ | $H_i \%$ |
|------------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|
| Fútbol     | 15    | 15    | 0.3   | 0.3   | 30 %     | 30 %     |
| Baloncesto | 10    | 25    | 0.2   | 0.5   | 20 %     | 50 %     |
| Rugby      | 12    | 37    | 0.24  | 0.74  | 24 %     | 74 %     |
| Béisbol    | 8     | 45    | 0.16  | 0.9   | 16 %     | 90 %     |
| Voleibol   | 5     | 50    | 0.1   | 1     | 10 %     | 100 %    |
| Total      | 50    | -     | 1     | -     | 100 %    | -        |

Figura 1.1: Preferencia de los estudiantes por ciertos deportes.

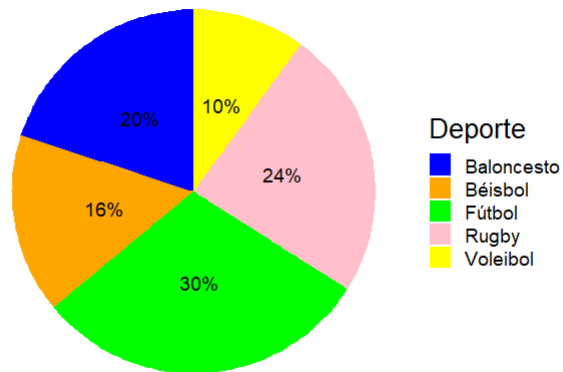
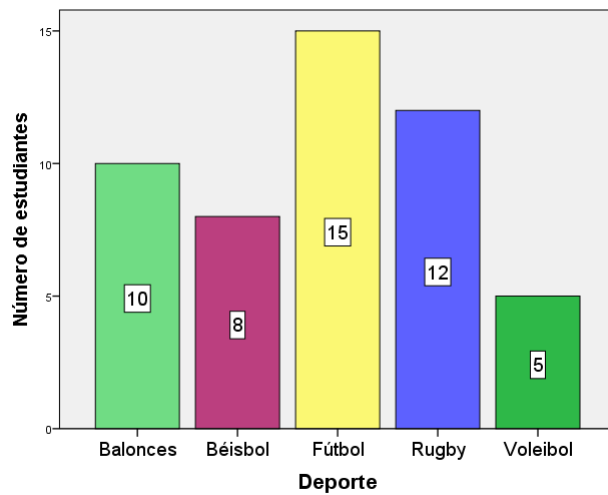


Figura 1.2: Preferencia de los estudiantes por ciertos deportes.



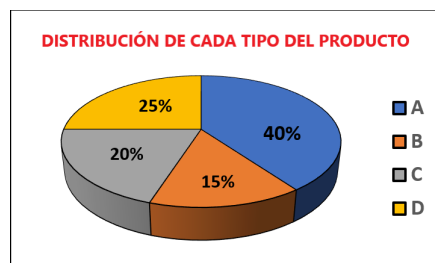
## Ejercicios.

1. En la siguiente tabla se registra información sobre el estrato al que pertenecen las personas de una zona de 1200 habitantes. Teniendo en cuenta dicha información, complete la tabla de frecuencias, determine la población, la muestra, la variable, su tipo y nivel de medición y represente la información mediante un diagrama.

Tabla 1.2: Distribución de frecuencias.

| Estrato | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ | $h_i \%$ | $H_i \%$ |
|---------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|
| 1       | 28    |       |       |       |          |          |
| 2       | 72    |       |       |       |          |          |
| 3       | 58    |       |       |       |          |          |
| 4       | 24    |       |       |       |          |          |
| 5       | 18    |       |       |       |          |          |
| Total   | 200   |       |       |       |          |          |

2. Una empresa fabrica un producto de cuatro tipos. En el gráfico se muestra la distribución de cada tipo del producto fabricado en una semana. Si en esa semana se fabricaron 5000 unidades del producto.
  - a) Construya una tabla en la que se indique el número de unidades fabricadas de cada tipo.
  - b) Construya un diagrama de barras que indique el número de unidades fabricadas de cada tipo.



3. En un barrio de 110 habitantes se escogieron 25 personas a las cuales se les preguntó sobre su preferencia por ciertos géneros musicales. Las

respuestas fueron las siguientes: 8 prefieren el vallenato, 6 prefieren la salsa, 4 prefieren la champeta, 5 prefieren el pop y 2 prefieren el merengue. Determine la población, la muestra, la variable, su tipo y nivel de medición, construya una tabla de frecuencias y represente la información mediante un diagrama de barras y un diagrama circular.

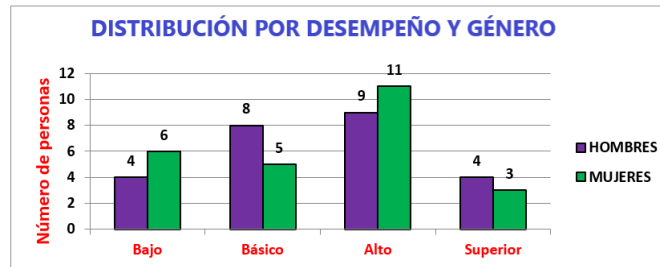
4. En la tabla se muestra la distribución del personal de un hospital de acuerdo a su rol y género.

| <div>Rol</div> <div>Género</div> | Auxiliar | Enfermero(a) | Médico general | Especialista | Total |
|----------------------------------|----------|--------------|----------------|--------------|-------|
| Hombre                           | 12       | 20           | 23             | 15           | 70    |
| Mujer                            | 22       | 30           | 16             | 12           | 80    |
| Total                            | 34       | 50           | 39             | 27           | 150   |

Teniendo en cuenta la información de la tabla responda las siguientes preguntas:

- ¿Qué porcentaje del personal representan los auxiliares?
- ¿Qué porcentaje del personal representan los especialistas?
- ¿Qué porcentaje del personal representan los hombres?
- ¿Qué porcentaje del personal representan las mujeres?
- ¿De los enfermeros qué porcentaje son hombres?
- ¿De las mujeres qué porcentaje son especialistas?
- ¿De los hombres qué porcentaje son auxiliares?
- Construya un diagrama circular que represente la distribución del personal por rol.
- Construya un diagrama circular que represente la distribución del personal por género.
- Construya un diagrama de barras que represente la distribución del personal por género y rol.

5. En el siguiente gráfico se registran los desempeños por género de los estudiantes de un curso de grado décimo de una institución educativa.



- Identifique las variables tenidas en cuenta y sus niveles de medición.
  - ¿Cuántas mujeres hay en el curso?
  - ¿Cuántas hombres hay en el curso?
  - Construya una tabla que muestre la información contenida en el gráfico.
  - Construya un diagrama circular que muestre los porcentajes por desempeño de los hombres.
  - Construya un diagrama circular que muestre los porcentajes por desempeño de las mujeres.
  - Construya un diagrama circular que muestre los porcentajes por desempeño de todo el curso sin tener en cuenta el género.
6. Para embaldosar un baño se utilizaron baldosas de diferentes colores y tamaños como se muestra en la tabla.

| color \ Tamaño | Azul | Gris | rosa |
|----------------|------|------|------|
| Grande         | 40   | 30   | 30   |
| Mediana        | 15   | 15   | 20   |
| Pequeña        | 15   | 20   | 15   |

- Identifique las variables tenidas en cuenta y sus niveles de medición.
- Construya un diagrama de barras que represente la información.

## 1.4. Análisis de variables cuantitativas.

Para analizar este tipo de variables tendremos en cuenta cuándo se trabaja con datos sin agrupar y cuándo se trabaja con datos agrupados.

### 1.4.1. Datos sin agrupar.

Se trabaja con datos sin agrupar cuando existen pocos datos diferentes y se pueden organizar sin crear grupos o intervalos con ellos. Las tablas de frecuencias se construyen de manera similar a las construidas para variables categóricas con la diferencia de que en este caso los  $x_i$  son los datos numéricos.

**Ejemplo 1.** Los siguientes datos corresponden a las edades de 25 estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Cecilia de Lleras de Montería.

14 17 14 15 18 16 17 15 15 18 14 15 17 16 15 18 16 17  
15 15 17 16 15 18 16

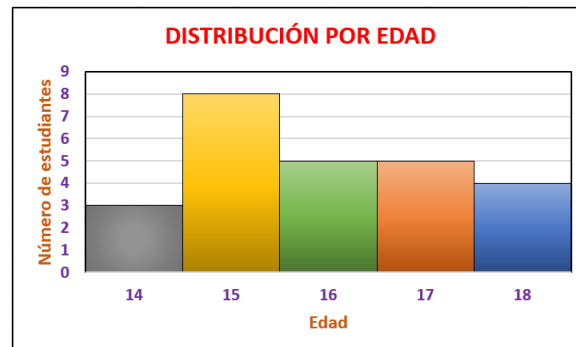
Se observan solo cinco datos diferentes: 14, 15, 16, 17 y 18. Esto se puede organizar en una tabla de frecuencias como sigue.

Tabla 1.3: Tabla de frecuencias.

| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ | $f\%$ | $F\%$ | $x_i \cdot f_i$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------------|
| 14    | 3     | 3     | 0.12  | 0.12  | 12%   | 12%   | 42              |
| 15    | 8     | 11    | 0.32  | 0.34  | 32%   | 34%   | 120             |
| 16    | 5     | 16    | 0.20  | 0.54  | 20%   | 54%   | 80              |
| 17    | 5     | 21    | 0.20  | 0.74  | 20%   | 74%   | 85              |
| 18    | 4     | 25    | 0.16  | 1     | 16%   | 100%  | 72              |
| Total | 25    | -     | 1     | -     | 100%  | -     | 399             |

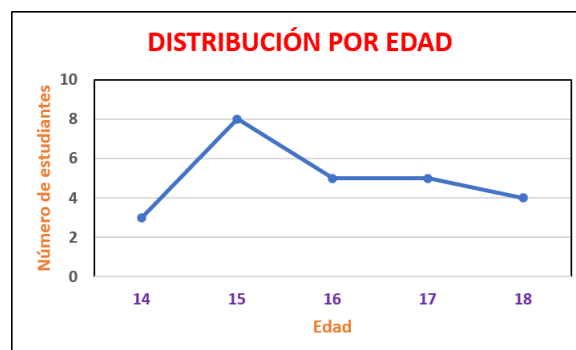
### 1.4.2. Histograma de frecuencias.

Este tipo de gráficos se utiliza cuando la variable es cuantitativa continua y está conformado por barras verticales sin espacio entre ellas. Cada barra se traza hasta el valor de la frecuencia absoluta del dato correspondiente. Para el ejemplo anterior tenemos el siguiente diagrama.



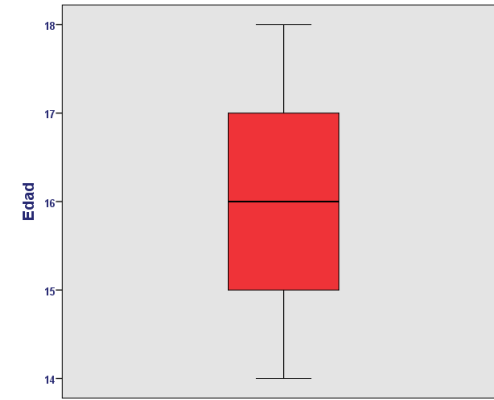
### 1.4.3. Polígono de frecuencias.

Este tipo de gráficos se utiliza cuando la variable es cuantitativa continua y está conformado por líneas que unen los puntos que representan las frecuencias absolutas de los datos. Para el ejemplo anterior tenemos el siguiente diagrama.



### 1.4.4. Diagrama de caja y bigotes (Boxplot).

Este tipo de gráficos se utiliza cuando la variable es cuantitativa continua en el cual se muestran el valor mínimo, el valor máximo y los tres cuartiles. Para el ejemplo anterior tenemos el siguiente diagrama.



#### 1.4.5. Medidas de tendencia central para datos sin agrupar.

Las medidas de tendencia central son valores que podrían representar de cierta manera a un conjunto de datos.

**Moda (*Mo*).** Es el dato con mayor frecuencia absoluta, es decir, el dato que más se repite.

En el ejemplo anterior la moda es 15, ya que es el dato con mayor frecuencia absoluta.

**Mediana ( $\tilde{x}$ ):** La mediana es un valor que se encuentra en el centro de los datos organizados en forma descendente o ascendente.

1. Si  $n$  es impar.  $\tilde{x} = x_{\frac{n+1}{2}}$

2. Si  $n$  es par.  $\tilde{x} = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$

Calculemos la mediana en el ejemplo anterior.

Como  $n = 25$  y es impar, la mediana es  $\tilde{x} = x_{\frac{n+1}{2}} = x_{\frac{25+1}{2}} = x_{\frac{26}{2}} = x_{13}$ , es decir, el dato que se encuentra en la posición 13. Buscamos en la frecuencia absoluta acumulada dónde está incluida la posición 13 y vemos que está entre

la frecuencia absoluta acumulada igual a 16, por lo cual la mediana es 16.

**Media** ( $\bar{x}$ ): Corresponde al cociente entre la sumatoria de los datos diferentes por sus frecuencias absolutas correspondientes ( $x_i \cdot f_i$ ) y el tamaño de la muestra ( $n$ ).  $\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{n}$

En el ejemplo podemos observar que el total en la última columna corresponde a  $\sum x_i \cdot f_i$ , por lo tanto,  $\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{n} = \frac{399}{25} = 15,96$ .

#### 1.4.6. Medidas de dispersión para datos sin agrupar.

Las medidas de dispersión permiten observar qué tan dispersos se encuentran los datos dentro de todo el conjunto. Dentro de estas medidas estudiaremos el rango, la desviación media, la varianza y la desviación estándar.

**Rango** (R): El rango está definido como la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de todos los datos.  $R = x_{max} - x_{min}$ .

En el ejemplo de las edades el rango sería  $R = x_{max} - x_{min} = 18 - 14 = 4$

**Desviación media (DM):** La desviación media está definida como el promedio de las desviaciones con respecto a la media. En este caso, se suman los valores absolutos de las desviaciones y el resultado se divide entre el tamaño de la muestra.  $DM = \frac{\sum_{i=1}^m |x_i - \bar{x}| \cdot f_i}{n}$

$n$ : Es el tamaño de la muestra.

$m$ : Es el número de datos diferentes.

**Varianza** ( $s^2$ ): La varianza está definida como la sumatoria de los cuadrados de las desviaciones con respecto a la media, dividida por el tamaño de la muestra menos 1.  $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n-1}$

**Desviación estándar (s):** Esta definida como la raíz cuadrada de la varianza.  $s = \sqrt{s^2}$

Para calcular la desviación media, la varianza y la desviación estándar se construye una tabla como sigue:

| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $\bar{x}$ | $x_i - \bar{x}$ | $ x_i - \bar{x} $ | $ x_i - \bar{x}  \cdot f_i$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$ |
|-------|-------|-------|-----------|-----------------|-------------------|-----------------------------|---------------------|-------------------------------|
| 14    | 3     | 3     | 16        | -2              | 2                 | 6                           | 4                   | 12                            |
| 15    | 8     | 11    | 16        | -1              | 1                 | 8                           | 1                   | 8                             |
| 16    | 5     | 16    | 16        | 0               | 0                 | 0                           | 0                   | 0                             |
| 17    | 5     | 21    | 16        | 1               | 1                 | 5                           | 1                   | 5                             |
| 18    | 4     | 25    | 16        | 2               | 2                 | 8                           | 4                   | 16                            |
| Total | 25    | -     | -         | 0               | 6                 | 27                          | 10                  | 41                            |

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^m |x_i - \bar{x}| \cdot f_i}{n} = \frac{27}{25} = 1,08$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n-1} = \frac{41}{25-1} = \frac{41}{24} = 1,708$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1,708} = 1,306$$

#### 1.4.7. Medidas de posición para datos sin agrupar.

Las medidas de posición son valores que dividen al conjunto de datos (organizados de menor a mayor) en grupos con la misma cantidad de datos. Aquí, trataremos los cuartiles y los deciles.

- **Cuartiles ( $Q_k$ ):** Los cuartiles son valores que dividen al conjunto de datos en cuatro grupos con la misma cantidad de datos. Existen tres cuartiles  $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $Q_3$ . El cuartil  $Q_2$  corresponde a la mediana. Los cuartiles se calculan como sigue:

1. Si  $n$  es múltiplo de 4.

$$\blacksquare Q_k = \frac{x_{\frac{kn}{4}} + x_{\frac{kn}{4}+1}}{2}. \quad k = 1, 2, 3.$$

2. Si al dividir  $n$  por 4 el residuo es 1.

$$\begin{aligned} \blacksquare Q_1 &= \frac{x_{\frac{n-1}{4}} + x_{\frac{n+3}{4}}}{2}. \\ \blacksquare Q_2 &= x_{\frac{n+1}{2}}. \\ \blacksquare Q_3 &= \frac{x_{\frac{3n+1}{4}} + x_{\frac{3n+5}{4}}}{2}. \end{aligned}$$

3. Si al dividir  $n$  por 4 el residuo es 2.

$$\begin{aligned} \blacksquare Q_1 &= x_{\frac{n+2}{4}}. \\ \blacksquare Q_2 &= \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}. \\ \blacksquare Q_3 &= x_{\frac{3n+2}{4}}. \end{aligned}$$

4. Si al dividir  $n$  por 4 el residuo es 3.

$$\blacksquare Q_k = x_{\frac{k(n+1)}{4}}. \quad k = 1, 2, 3.$$

En el ejemplo de las edades, como  $n = 25$  es impar y al dividirlo entre 4 el residuo es 1, los cuartiles serían:

■ Ya en la tabla los datos están organizados.

$$\blacksquare Q_1 = \frac{x_{\frac{n-1}{4}} + x_{\frac{n+3}{4}}}{2} = \frac{x_{\frac{25-1}{4}} + x_{\frac{25+3}{4}}}{2} = \frac{x_{\frac{24}{4}} + x_{\frac{28}{4}}}{2} = \frac{x_6 + x_7}{2} = \frac{15+15}{2} = 15.$$

$$\blacksquare Q_2 = x_{\frac{n+1}{2}} = x_{\frac{25+1}{2}} = x_{\frac{26}{2}} = x_{13} = 16.$$

$$\blacksquare Q_3 = \frac{x_{\frac{3n+1}{4}} + x_{\frac{3n+5}{4}}}{2} = \frac{x_{\frac{3 \cdot 25+1}{4}} + x_{\frac{3 \cdot 25+5}{4}}}{2} = \frac{x_{\frac{76}{4}} + x_{\frac{80}{4}}}{2} = \frac{x_{19} + x_{20}}{2} = \frac{17+17}{2} = 17.$$

**Deciles ( $D_i$ ):** Los deciles son valores que dividen al conjunto de datos en diez grupos con la misma cantidad de datos. Existen nueve deciles  $D_1, D_2, D_3, \dots, D_9$ . El decil  $D_5$  corresponde a la mediana. Los deciles se calculan como sigue:

1. Si  $n$  es múltiplo de 10.

$$\blacksquare D_k = \frac{x \frac{kn}{10} + x \frac{kn}{10} + 1}{2}. \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

2. Si al dividir  $n$  por 10 el residuo es 1.

$$\blacksquare D_k = \frac{x \frac{k(n-1)}{10} + x \frac{k(n-1)}{10} + 1}{2}. \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

$$\blacksquare D_5 = x \frac{n+1}{2}.$$

$$\blacksquare D_k = \frac{x \frac{k(n-1)}{10} + 1 + x \frac{k(n-1)}{10} + 2}{2}. \quad k = 6, 7, 8, 9.$$

3. Si al dividir  $n$  por 10 el residuo es 2.

$$\blacksquare D_1 = x \frac{n+8}{10}.$$

$$\blacksquare D_k = \frac{x \frac{k(n-2)}{10} + 1 + x \frac{k(n-2)}{10} + 2}{2}. \quad k = 2, 3, 4, 5.$$

$$\blacksquare D_6 = x \frac{3n+4}{5}.$$

$$\blacksquare D_k = \frac{x \frac{k(n-2)}{10} + 1 + x \frac{k(n-2)}{10} + 2}{2}. \quad k = 7, 8, 9.$$

4. Si al dividir  $n$  por 10 el residuo es 3.

$$\blacksquare D_1 = x \frac{n+7}{10}.$$

$$\blacksquare D_k = \frac{x \frac{k(n-3)}{10} + 1 + x \frac{k(n-3)}{10} + 2}{2}. \quad k = 2, 3, 4.$$

$$\blacksquare D_5 = x \frac{n+1}{2}.$$

$$\blacksquare D_6 = x \frac{3n+1}{5}.$$

$$\blacksquare D_k = \frac{x \frac{k(n-3)}{10} + 3 + x \frac{k(n-3)}{10} + 4}{2}. \quad k = 7, 8, 9.$$

5. Si al dividir  $n$  por 10 el residuo es 4.

$$\blacksquare D_1 = x \frac{n+6}{10}.$$

$$\blacksquare D_2 = \frac{x \frac{n+1}{5} + x \frac{n+1}{5} + 1}{2}.$$

$$\blacksquare D_3 = x \frac{3n+8}{10}.$$

$$\blacksquare D_4 = \frac{x \frac{2n+2}{5} + x \frac{2n+2}{5} + 1}{2}.$$

- $D_5 = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}.$
- $D_6 = x_{\frac{3n+3}{5}}.$
- $D_7 = \frac{x_{\frac{7n+2}{10}} + x_{\frac{7n+2}{10}+1}}{2}.$
- $D_8 = x_{\frac{4n+4}{5}}.$
- $D_9 = \frac{x_{\frac{9n+4}{10}} + x_{\frac{9n+4}{10}+1}}{2}.$

6. Si al dividir  $n$  por 10 el residuo es 5.

- $D_k = x_{\frac{kn+5}{10}}. \quad k = 1, 3, 5, 7, 9.$
- $D_k = \frac{x_{\frac{kn}{10}} + x_{\frac{kn}{10}+1}}{2}. \quad k = 2, 4, 6, 8.$

7. Si al dividir  $n$  por 10 el residuo es 6.

- $D_1 = x_{\frac{n+4}{10}}.$
- $D_2 = x_{\frac{n+4}{5}}.$
- $D_3 = \frac{x_{\frac{3n+2}{10}} + x_{\frac{3n+2}{10}+1}}{2}.$
- $D_4 = x_{\frac{2n+3}{5}}.$
- $D_5 = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}.$
- $D_6 = x_{\frac{3n+2}{5}}.$
- $D_7 = x_{\frac{7n+8}{10}}.$
- $D_8 = \frac{x_{\frac{4n+1}{5}} + x_{\frac{4n+1}{5}+1}}{2}.$
- $D_9 = x_{\frac{9n+6}{10}}.$

8. Si al dividir  $n$  por 10 el residuo es 7.

- $D_k = x_{\frac{k(n+3)}{10}}. \quad k = 1, 2, 3.$
- $D_4 = \frac{x_{\frac{2n+1}{5}} + x_{\frac{2n+1}{5}+1}}{2}.$
- $D_5 = x_{\frac{n+1}{2}}.$
- $D_6 = x_{\frac{3n+4}{5}}.$

$$\blacksquare D_7 = \frac{x_{\frac{7n+1}{10}} + x_{\frac{7n+1}{10}+1}}{2}.$$

$$\blacksquare D_8 = x_{\frac{4n+2}{5}}.$$

$$\blacksquare D_9 = x_{\frac{9n+7}{10}}.$$

9. Si al dividir  $n$  por 10 el residuo es 8.

$$\blacksquare D_k = x_{\frac{k(n+2)}{10}}. \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

$$\blacksquare D_5 = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}.$$

$$\blacksquare D_k = x_{\frac{k(n+2)-10}{10}}. \quad k = 6, 7, 8, 9.$$

10. Si al dividir  $n$  por 10 el residuo es 9.

$$\blacksquare D_k = x_{\frac{k(n+1)}{10}}. \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

En el ejemplo de las edades, como  $n = 25$  y al dividirlo entre 10 el residuo es 5, los deciles serían:

$$\blacksquare D_k = x_{\frac{kn+5}{10}}. \quad k = 1, 3, 5, 7, 9.$$

$$\blacksquare D_k = \frac{x_{\frac{kn}{10}} + x_{\frac{kn}{10}+1}}{2}. \quad k = 2, 4, 6, 8.$$

$$\blacksquare D_1 = x_{\frac{kn+5}{10}} = x_{\frac{1 \cdot 25+5}{10}} = x_{\frac{25+5}{10}} = x_{\frac{30}{10}} = x_3 = 14.$$

$$\blacksquare D_2 = \frac{x_{\frac{kn}{10}} + x_{\frac{kn}{10}+1}}{2} = \frac{x_{\frac{2 \cdot 25}{10}} + x_{\frac{2 \cdot 25}{10}+1}}{2} = \frac{x_{\frac{50}{10}} + x_{\frac{50}{10}+1}}{2} = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{15+15}{2} = 15.$$

$$\blacksquare D_3 = x_{\frac{kn+5}{10}} = x_{\frac{3 \cdot 25+5}{10}} = x_{\frac{75+5}{10}} = x_{\frac{80}{10}} = x_8 = 15.$$

$$\blacksquare D_4 = \frac{x_{\frac{kn}{10}} + x_{\frac{kn}{10}+1}}{2} = \frac{x_{\frac{4 \cdot 25}{10}} + x_{\frac{4 \cdot 25}{10}+1}}{2} = \frac{x_{\frac{100}{10}} + x_{\frac{100}{10}+1}}{2} = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{15+15}{2} = 15.$$

$$\blacksquare D_5 = x_{\frac{kn+5}{10}} = x_{\frac{5 \cdot 25+5}{10}} = x_{\frac{125+5}{10}} = x_{\frac{130}{10}} = x_{13} = 16.$$

$$\blacksquare D_6 = \frac{x_{\frac{kn}{10}} + x_{\frac{kn}{10}+1}}{2} = \frac{x_{\frac{6 \cdot 25}{10}} + x_{\frac{6 \cdot 25}{10}+1}}{2} = \frac{x_{\frac{150}{10}} + x_{\frac{150}{10}+1}}{2} = \frac{x_{15} + x_{16}}{2} = \frac{16+16}{2} = 16.$$

$$\blacksquare D_7 = x_{\frac{kn+5}{10}} = x_{\frac{7 \cdot 25+5}{10}} = x_{\frac{175+5}{10}} = x_{\frac{180}{10}} = x_{18} = 17.$$

$$\blacksquare D_8 = \frac{x_{\frac{kn}{10}} + x_{\frac{kn}{10}+1}}{2} = \frac{x_{\frac{8 \cdot 25}{10}} + x_{\frac{8 \cdot 25}{10}+1}}{2} = \frac{x_{\frac{200}{10}} + x_{\frac{200}{10}+1}}{2} = \frac{x_{20} + x_{21}}{2} = \frac{17+17}{2} = 17.$$

$$\blacksquare D_9 = x_{\frac{kn+5}{10}} = x_{\frac{9 \cdot 25+5}{10}} = x_{\frac{225+5}{10}} = x_{\frac{230}{10}} = x_{23} = 18.$$

**Ejemplo 2.** En un barrio de Montería con 234 familias, se consultó sobre el número de hijos de 50 familias. Los datos se registran en la siguiente tabla.

Tabla 1.4: Número de hijos ( $x_i$ ) por familia.

| $x_i$ | $f_i$ |
|-------|-------|
| 0     | 2     |
| 1     | 10    |
| 2     | 15    |
| 3     | 12    |
| 4     | 6     |
| 5     | 5     |
| Total | 50    |

1. Determine la población y la muestra.
2. Identifique la variable, su tipo y nivel de medición.
3. Construya una tabla de frecuencias completa.
4. Construya un diagrama de barras para representar la información.
5. Calcule las medidas de tendencia central, las medidas de dispersión y las medidas de posición.

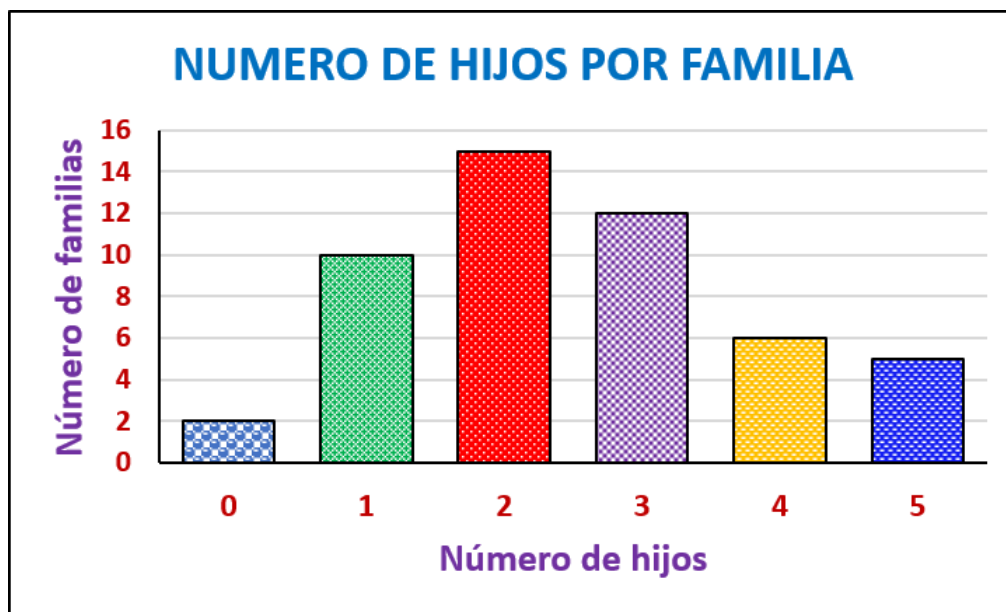
**Solución.**

1. **Población:** Las 234 familias del barrio.  
**Muestra:** Las 50 familias consultadas.
2. **Variable:** Número de hijos.  
**Tipo de variable:** Cuantitativa discreta.  
**Nivel de medición:** Razón.

3. Tabla de frecuencias.

| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ | $h_i \%$ | $H_i \%$ | $x_i \cdot f_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|-----------------|-----------------|---------------------|-------------------------------|
| 0     | 2     | 2     | 0.04  | 0.04  | 4 %      | 4 %      | 0               | -2.5            | 6.25                | 12.5                          |
| 1     | 10    | 12    | 0.2   | 0.24  | 20 %     | 24 %     | 10              | -1.5            | 2.25                | 22.5                          |
| 2     | 15    | 27    | 0.3   | 0.54  | 30 %     | 54 %     | 30              | -0.5            | 0.25                | 3.75                          |
| 3     | 12    | 39    | 0.24  | 0.78  | 24 %     | 78 %     | 36              | 0.5             | 0.25                | 3                             |
| 4     | 6     | 45    | 0.12  | 0.9   | 12 %     | 90 %     | 24              | 1.5             | 2.25                | 13.5                          |
| 5     | 5     | 50    | 0.1   | 1     | 10 %     | 100 %    | 25              | 2.5             | 6.25                | 31.25                         |
| Total | 50    | -     | 1     | -     | 100 %    | -        | 125             | 0               | 18                  | 86.5                          |

4. Diagrama de barras.



5. a) Medidas de tendencia central.

■  $Mo = 2$

■  $\tilde{x} = 2$   $\tilde{x} = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} = \frac{x_{\frac{50}{2}} + x_{\frac{50}{2}+1}}{2} = \frac{x_{25} + x_{26}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$

■  $\bar{x} = 2,5$   $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i \cdot f_i}{n} = \frac{125}{50} = 2,5$

b) Medidas de dispersión.

■  $R = 5.$

$$R = 5 - 0 = 5$$

■  $s^2 = 1,765.$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n-1} = \frac{86,5}{50-1} = \frac{86,5}{49} = 1,765$$

■  $s = 1,33.$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1,765} = 1,33$$

c) Medidas de posición.

- **Cuartiles.** Como  $n = 50$  es par no divisible por 4 los cuartiles serían:

•  $Q_1 = 2.$

$$Q_1 = x_{\frac{n+2}{4}} = x_{\frac{50+2}{4}} = x_{\frac{52}{4}} = x_{13} = 2.$$

•  $Q_2 = 2.$

$$Q_2 = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} = \frac{x_{\frac{50}{2}} + x_{\frac{50}{2}+1}}{2} = \frac{x_{25} + x_{26}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2.$$

•  $Q_3 = 3.$

$$Q_3 = x_{\frac{3n+2}{4}} = x_{\frac{3 \cdot 50 + 2}{4}} = x_{\frac{150+2}{4}} = x_{\frac{152}{4}} = x_{38} = 3.$$

- **Deciles.** Como  $n = 50$  y es múltiplo de 10 los deciles serían:

•  $D_k = \frac{x_{\frac{kn}{10}} + x_{\frac{kn}{10}+1}}{2}.$

$$k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

•  $D_1 = \frac{x_{\frac{1 \cdot 50}{10}} + x_{\frac{1 \cdot 50}{10}+1}}{2} = \frac{x_{\frac{50}{10}} + x_{\frac{50}{10}+1}}{2} = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{1+1}{2} = 1.$

•  $D_2 = \frac{x_{\frac{2 \cdot 50}{10}} + x_{\frac{2 \cdot 50}{10}+1}}{2} = \frac{x_{\frac{100}{10}} + x_{\frac{100}{10}+1}}{2} = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1.$

•  $D_3 = \frac{x_{\frac{3 \cdot 50}{10}} + x_{\frac{3 \cdot 50}{10}+1}}{2} = \frac{x_{\frac{150}{10}} + x_{\frac{150}{10}+1}}{2} = \frac{x_{15} + x_{16}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2.$

$$\bullet D_4 = \frac{x \frac{4 \cdot 50}{10} + x \frac{4 \cdot 50}{10} + 1}{2} = \frac{x \frac{200}{10} + x \frac{200}{10} + 1}{2} = \frac{x_{20} + x_{21}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2.$$

$$\bullet D_5 = \frac{x \frac{5 \cdot 50}{10} + x \frac{5 \cdot 50}{10} + 1}{2} = \frac{x \frac{250}{10} + x \frac{250}{10} + 1}{2} = \frac{x_{25} + x_{26}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2.$$

$$\bullet D_6 = \frac{x \frac{6 \cdot 50}{10} + x \frac{6 \cdot 50}{10} + 1}{2} = \frac{x \frac{300}{10} + x \frac{300}{10} + 1}{2} = \frac{x_{30} + x_{31}}{2} = \frac{3+3}{2} = 3.$$

$$\bullet D_7 = \frac{x \frac{7 \cdot 50}{10} + x \frac{7 \cdot 50}{10} + 1}{2} = \frac{x \frac{350}{10} + x \frac{350}{10} + 1}{2} = \frac{x_{35} + x_{36}}{2} = \frac{3+3}{2} = 3.$$

$$\bullet D_8 = \frac{x \frac{8 \cdot 50}{10} + x \frac{8 \cdot 50}{10} + 1}{2} = \frac{x \frac{400}{10} + x \frac{400}{10} + 1}{2} = \frac{x_{40} + x_{41}}{2} = \frac{4+4}{2} = 4.$$

$$\bullet D_9 = \frac{x \frac{9 \cdot 50}{10} + x \frac{9 \cdot 50}{10} + 1}{2} = \frac{x \frac{450}{10} + x \frac{450}{10} + 1}{2} = \frac{x_{45} + x_{46}}{2} = \frac{4+5}{2} = 4,5.$$

## Ejercicios.

1. En un curso se registraron las masas (en Kg) de 40 estudiantes, cuyos valores se muestran a continuación.

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 45 | 50 | 52 | 49 | 47 | 46 | 50 | 50 | 47 | 50 |
| 51 | 51 | 52 | 48 | 47 | 51 | 46 | 50 | 49 | 47 |
| 46 | 52 | 48 | 51 | 49 | 47 | 52 | 47 | 45 | 51 |
| 51 | 49 | 45 | 47 | 50 | 51 | 47 | 49 | 48 | 47 |

- a) Identifique la variable, su tipo y nivel de medición.
  - b) Construya una tabla de frecuencias completa.
  - c) Represente la información mediante un polígono de frecuencias.
  - d) Calcule las medidas de tendencia central, las medidas de dispersión y las medidas de posición.
2. En una tienda se registra el número de gaseosas vendidas diariamente durante un mes. En la siguiente tabla se muestra la información correspondiente.

| $x_i$ | $f_i$ |
|-------|-------|
| 4     | 2     |
| 5     | 5     |
| 6     | 4     |
| 7     | 8     |
| 8     | 6     |
| 9     | 5     |
| Total | 30    |

- a) Identifique la variable, su tipo y nivel de medición.
- b) Construya una tabla de frecuencias completa.
- c) Represente la información mediante un diagrama de barras.
- d) Calcule las medidas de tendencia central, las medidas de dispersión y las medidas de posición.

#### 1.4.8. Datos agrupados.

Se trabaja con datos agrupados cuando existen muchos datos diferentes y se pueden organizar creando intervalos. Los intervalos poseen un límite inferior, un límite superior y una amplitud. Para calcular el número de intervalos  $c$  se puede utilizar la regla de Sturges  $c = 1 + 3,322 \cdot \log(n)$ . Para calcular la amplitud ( $a$ ) de los intervalos se divide el rango entre el número de intervalos ( $a = \frac{R}{c}$ ).

#### 1.4.9. Medidas de tendencia central para datos agrupados.

**Moda (Mo):** La moda para datos agrupados se puede calcular de la siguiente forma. Aquí,

$a$ : Es la amplitud del intervalo.

$i$ : Es el intervalo de mayor frecuencia absoluta.

$L_i$ : Es el límite real inferior del intervalo que contiene a la moda.

$d_1$ : Es la diferencia entre la frecuencia absoluta del intervalo de la moda y el intervalo anterior,  $d_1 = f_i - f_{i-1}$

$d_2$ : Es la diferencia entre la frecuencia absoluta del intervalo de la moda y el intervalo posterior,  $d_2 = f_i - f_{i+1}$

$f_i$ : Es la frecuencia absoluta del intervalo de la moda.

**Caso 1.**  $Mo = L_i + \left( \frac{d_1}{d_1 + d_2} \right) \cdot a$ .

**Mediana ( $\tilde{x}$ ):** La mediana se calcula de la siguiente manera:

$$\tilde{x} = L_i + \left( \frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i} \right) \cdot a, \text{ donde}$$

$i$ : Es el primer intervalo cuya frecuencia acumulada supera a  $\frac{n}{2}$ .

$L_i$ : Es el límite real inferior del intervalo de la mediana.

$n$ : Es el tamaño de la muestra.

$F_{i-1}$ : Es la frecuencia acumulada anterior al intervalo de la mediana.

$f_i$ : Es la frecuencia absoluta del intervalo de la mediana.

$a$ : Es la amplitud del intervalo.

**Media( $\bar{x}$ ):** La media se calcula de la siguiente forma:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i \cdot f_i}{n}, \text{ donde}$$

$x_i$ : Es la marca de clase.

$f_i$ : Es la frecuencia absoluta del intervalo  $i$ -ésimo.

$n$ : Es el tamaño de la muestra.

$m$ : Es el número de intervalos.

#### 1.4.10. Medidas de dispersión para datos agrupados.

Las medidas de dispersión para datos agrupados se calculan de manera similar a cuando se tienen datos sin agrupar, con la diferencia de que acá  $x_i$  corresponde a la marca de clase.

**Rango (R):**  $R = L_{max} - L_{min}$ , donde

$L_{max}$ : Es el límite real superior del último intervalo.

$L_{min}$ : Es el límite real inferior del primer intervalo.

**Desviación media (DM):**  $DM = \frac{\sum_{i=1}^m |x_i - \bar{x}| \cdot f_i}{n}$ , donde

$x_i$ : Es la marca de clase.

$m$ : Es el número de intervalos.

**Varianza ( $s^2$ ):**  $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n-1}$ , donde

$x_i$ : Es la marca de clase.

$m$ : Es el número de intervalos.

**Desviación estándar (s):**  $s = \sqrt{s^2}$

#### 1.4.11. Medidas de posición para datos agrupados.

Las medidas de posición para datos agrupados se definen de la misma manera que para datos sin agrupar.

**Cuartiles ( $Q_j$ ):** Ya se dijo que los cuartiles dividen a los datos organizados en cuatro grupos con el mismo número de datos cada uno. Se calculan de la siguiente manera:  $Q_j = L_i + \left[ \frac{P_{Q_j} - F_{i-1}}{f_i} \right] \cdot a$ , donde

$P_{Q_j}$ : Es la posición donde se encuentra el cuartil  $j$ .

$L_i$ : Es el límite real inferior del intervalo donde se encuentra el cuartil.

$F_{i-1}$ : Es la frecuencia acumulada anterior a la frecuencia acumulada donde se encuentra el cuartil.

$f_i$ : Es la frecuencia absoluta del intervalo donde se encuentra el cuartil.

$a$ : Es la amplitud de los intervalos.

**Deciles ( $D_j$ ):** Para datos agrupados los deciles se calculan de la siguiente manera:  $D_j = L_i + \left[ \frac{P_{D_j} - F_{i-1}}{f_i} \right] \cdot a$ , donde.

$P_{D_j}$ : Es la posición donde se encuentra el decil  $j$ .

$L_i$ : Es el límite real inferior del intervalo donde se encuentra el decil.

$F_{i-1}$ : Es la frecuencia acumulada anterior a la frecuencia acumulada donde se encuentra el decil.

$f_i$ : Es la frecuencia absoluta del intervalo donde se encuentra el decil.

$a$ : Es la amplitud de los intervalos.

**Ejemplo.** En la siguiente tabla se presentan los puntajes obtenidos por 100 aspirantes a un empleo en cierto entidad.

| Intervalo de clase | $f_i$ |
|--------------------|-------|
| $10 \leq x < 20$   | 12    |
| $20 \leq x < 30$   | 11    |
| $30 \leq x < 40$   | 10    |
| $40 \leq x < 50$   | 9     |
| $50 \leq x < 60$   | 14    |
| $60 \leq x < 70$   | 12    |
| $70 \leq x < 80$   | 8     |
| $80 \leq x < 90$   | 13    |
| $90 \leq x < 100$  | 11    |
| Total              | 100   |

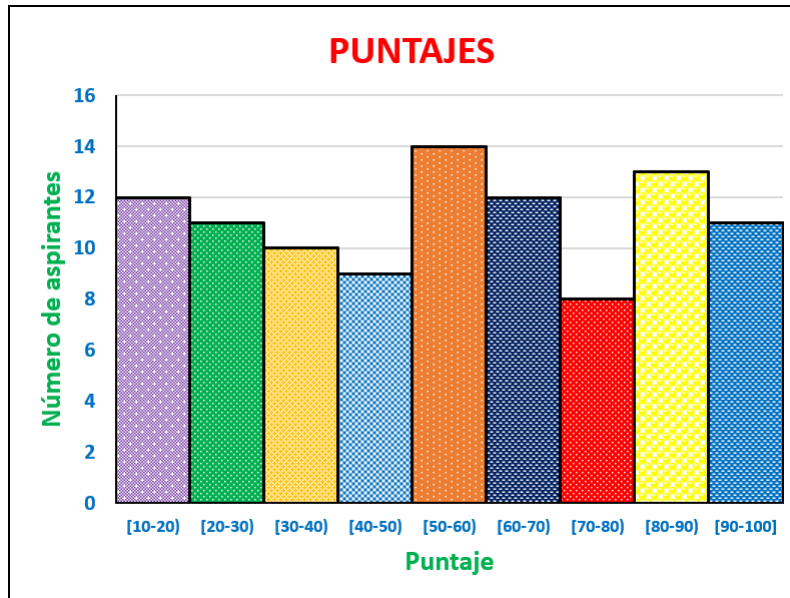
1. Complete la tabla de frecuencias.
2. Construya un histograma de frecuencias.
3. Calcule las medidas de tendencia central, de dispersión y de posición.

**Solución.**

1. Tabla de frecuencias.

| Intervalo de clase | $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ | $h_i \%$ | $H_i \%$ | $x_i \cdot f_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$ |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|-----------------|-----------------|---------------------|-------------------------------|
| $10 \leq x < 20$   | 15    | 12    | 12    | 0.12  | 0.12  | 12 %     | 12 %     | 180             | -40.1           | 1608.01             | 19 296.12                     |
| $20 \leq x < 30$   | 25    | 11    | 23    | 0.11  | 0.23  | 11 %     | 23 %     | 275             | -30.1           | 906.01              | 9966.11                       |
| $30 \leq x < 40$   | 35    | 10    | 33    | 0.10  | 0.33  | 10 %     | 33 %     | 350             | -20.1           | 404.01              | 4040.1                        |
| $40 \leq x < 50$   | 45    | 9     | 42    | 0.09  | 0.42  | 9 %      | 42 %     | 405             | -10.1           | 102.01              | 918.09                        |
| $50 \leq x < 60$   | 55    | 14    | 56    | 0.14  | 0.56  | 14 %     | 56 %     | 770             | -0.1            | 0.01                | 0.14                          |
| $60 \leq x < 70$   | 65    | 12    | 68    | 0.12  | 0.68  | 12 %     | 68 %     | 780             | 9.9             | 98.01               | 1176.12                       |
| $70 \leq x < 80$   | 75    | 8     | 76    | 0.08  | 0.76  | 8 %      | 76 %     | 600             | 19.9            | 396.01              | 3168.08                       |
| $80 \leq x < 90$   | 85    | 13    | 89    | 0.13  | 0.89  | 13 %     | 89 %     | 1105            | 29.9            | 894.01              | 11 622.13                     |
| $90 \leq x < 100$  | 95    | 11    | 100   | 0.11  | 1     | 11 %     | 100 %    | 1045            | 39.9            | 1592.01             | 17 512.11                     |
| Total              | -     | 100   | -     | 1     | -     | 100 %    | -        | 5510            | -               | 6000.09             | 67 699                        |

## 2. Histograma de frecuencias.



## 3. Medidas de tendencia central, de dispersión y de posición.

### a) Medidas de tendencia central.

- $Mo = 57.$   $Mo = 50 + \left(\frac{5}{5+2}\right) \cdot 10 = 50 + (0,7) \cdot 10 = 57$
- $\tilde{x} = 55,7.$   $\tilde{x} = L_i + \left(\frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i}\right) \cdot a = 50 + \left(\frac{\frac{100}{2} - 42}{14}\right) \cdot 10 = 55,7$
- $\bar{x} = 55,1.$   $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i \cdot f_i}{n} = \frac{5510}{100} = 55,1$

### b) Medidas de dispersión.

- $R = 90.$   $R = x_{Máx} - x_{Mín} = 100 - 10 = 90$
- $s^2 = .$   $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n-1} = \frac{67\ 699}{100-1} = 683,83$
- $s = 26,15.$   $s = \sqrt{683,83} = 26,15$

### c) Medidas de posición (cuartiles y deciles).

#### • Cuartiles.

- $Q_1 = 32,5.$   $Q_j = L_i + \left[\frac{P_{Q_j} - F_{i-1}}{f_i}\right] \cdot a = 30 + \left[\frac{25,5 - 23}{10}\right] \cdot 10 = 32,5$
- $Q_2 = 56.$   $Q_j = L_i + \left[\frac{P_{Q_j} - F_{i-1}}{f_i}\right] \cdot a = 50 + \left[\frac{50,5 - 42}{14}\right] \cdot 10 = 56$
- $Q_3 = 66,3.$   $Q_j = L_i + \left[\frac{P_{Q_j} - F_{i-1}}{f_i}\right] \cdot a = 60 + \left[\frac{75,5 - 68}{12}\right] \cdot 10 = 66,3$

- Deciles.

$$\blacksquare D_1 = 18,5. \quad D_j = L_i + \left[ \frac{P_{D_j} - F_{i-1}}{f_i} \right] \cdot a = 10 + \left[ \frac{10,5 - 0}{12} \right] \cdot 10 = 18,5$$

$$\blacksquare D_2 = 27,7. \quad D_j = L_i + \left[ \frac{P_{D_j} - F_{i-1}}{f_i} \right] \cdot a = 20 + \left[ \frac{20,5 - 12}{11} \right] \cdot 10 = 27,7$$

$$\blacksquare D_3 = 37,5. \quad D_j = L_i + \left[ \frac{P_{D_j} - F_{i-1}}{f_i} \right] \cdot a = 30 + \left[ \frac{30,5 - 23}{10} \right] \cdot 10 = 37,5$$

$$\blacksquare D_4 = 48,3. \quad D_j = L_i + \left[ \frac{P_{D_j} - F_{i-1}}{f_i} \right] \cdot a = 40 + \left[ \frac{40,5 - 33}{9} \right] \cdot 10 = 48,3$$

$$\blacksquare D_5 = 56. \quad D_j = L_i + \left[ \frac{P_{D_j} - F_{i-1}}{f_i} \right] \cdot a = 50 + \left[ \frac{50,5 - 42}{14} \right] \cdot 10 = 56$$

$$\blacksquare D_6 = 63,7. \quad D_j = L_i + \left[ \frac{P_{D_j} - F_{i-1}}{f_i} \right] \cdot a = 60 + \left[ \frac{60,5 - 56}{12} \right] \cdot 10 = 63,7$$

$$\blacksquare D_7 = 73. \quad D_j = L_i + \left[ \frac{P_{D_j} - F_{i-1}}{f_i} \right] \cdot a = 70 + \left[ \frac{70,5 - 68}{8} \right] \cdot 10 = 73$$

$$\blacksquare D_8 = 83,5. \quad D_j = L_i + \left[ \frac{P_{D_j} - F_{i-1}}{f_i} \right] \cdot a = 80 + \left[ \frac{80,5 - 76}{13} \right] \cdot 10 = 83,5$$

$$\blacksquare D_9 = 91,4. \quad D_j = L_i + \left[ \frac{P_{D_j} - F_{i-1}}{f_i} \right] \cdot a = 90 + \left[ \frac{90,5 - 89}{11} \right] \cdot 10 = 91,4$$

### Problemas de aplicación.

1. Se midieron los tiempos (en segundos) que tardaron 50 participantes en una competencia.

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 27 | 23 | 22 | 38 | 43 | 24 | 35 | 26 | 48 | 18 |
| 20 | 25 | 23 | 22 | 52 | 31 | 30 | 41 | 45 | 29 |
| 27 | 43 | 29 | 28 | 27 | 25 | 29 | 28 | 24 | 37 |
| 16 | 28 | 29 | 18 | 26 | 33 | 25 | 27 | 25 | 34 |
| 38 | 32 | 36 | 22 | 32 | 33 | 21 | 23 | 24 | 18 |

- a) Construya una tabla de frecuencias por intervalos.
- b) Represente la información mediante un histograma de frecuencias.
- c) Calcule las medidas de tendencia central y las medidas de dispersión.
2. Los siguientes datos corresponden a las notas obtenidas por 100 alumnos en un curso de Estadística.

|     |    |     |    |    |    |    |     |    |    |     |    |     |    |    |
|-----|----|-----|----|----|----|----|-----|----|----|-----|----|-----|----|----|
| 100 | 87 | 54  | 82 | 93 | 47 | 40 | 53  | 88 | 58 | 84  | 65 | 57  | 66 | 25 |
| 70  | 85 | 36  | 61 | 34 | 33 | 33 | 100 | 69 | 77 | 88  | 63 | 17  | 42 | 55 |
| 98  | 70 | 68  | 70 | 65 | 70 | 84 | 52  | 60 | 54 | 57  | 47 | 57  | 86 | 25 |
| 66  | 40 | 100 | 32 | 39 | 90 | 83 | 64  | 95 | 85 | 100 | 67 | 60  | 42 | 65 |
| 82  | 85 | 62  | 72 | 65 | 76 | 23 | 96  | 30 | 45 | 77  | 55 | 100 | 80 | 55 |
| 52  | 85 | 68  | 53 | 82 | 55 | 51 | 47  | 47 | 64 | 75  | 65 | 60  | 45 | 75 |
| 62  | 93 | 98  | 58 | 95 | 83 | 33 | 70  | 51 | 60 |     |    |     |    |    |

- a) Construya una distribución de frecuencias agrupadas.
- b) Construya un diagrama poligonal.
- c) ¿Qué porcentaje de los alumnos tiene una nota inferior a 61?
- d) ¿Cuántos alumnos tienen una nota mayor o igual que 72?
- e) Interprete la frecuencia absoluta acumulada del cuarto intervalo.
- f) interprete la frecuencia porcentual del sexto intervalo.

3. Los siguientes datos corresponden al sueldo (en miles de pesos) de 40 trabajadores de una empresa:

|     |     |      |     |     |     |     |      |     |     |
|-----|-----|------|-----|-----|-----|-----|------|-----|-----|
| 600 | 870 | 540  | 820 | 930 | 470 | 400 | 530  | 880 | 580 |
| 700 | 850 | 660  | 610 | 540 | 400 | 550 | 1000 | 690 | 770 |
| 980 | 700 | 680  | 700 | 650 | 700 | 840 | 520  | 600 | 540 |
| 660 | 400 | 1000 | 520 | 900 | 920 | 830 | 640  | 950 | 850 |

- a) Construya una distribución de frecuencias agrupadas.
- b) ¿En qué clase se encuentra el mayor número de trabajadores?
- c) ¿Qué porcentaje de trabajadores gana entre \$ 744 000 y \$ 830 000?
- d) ¿Cuántos trabajadores ganan por lo menos \$ 572 000?
- e) ¿Cuántos trabajadores ganan menos de \$ \$ 744 000?
4. Dado el siguiente conjunto de datos, construya una tabla de frecuencias, calcule las medidas de tendencia central, calcule las medidas de dispersión y grafique la información.
- 31 35 30 32 35 30 50 43 37 35 33 44 46 20 39 38 50 48 41  
 34 47 36 40 42 45 49 43 48 50 40 25 38 41 39 24 47 42 36  
 33 32 49 45 36 44 34 37 31 28 47 32 35 21 33 39 41 38 40  
 34 43 42 31 32 36 35 26 42 50 27 44 45 48 49 30 50 44 33  
 32 45 38 29 23 37 32 45 43 31 45 43 38 22 39 47 25 45 37  
 48 34 41 40 39

5. Considere la siguiente distribución de frecuencias.

|       |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $x_i$ | 115 | 116 | 117 | 118 | 119 | 120 | 121 | 122 | 123 | 124 |
| $f_i$ | 4   | 6   | 9   | 13  | 15  | 19  | 20  | 18  | 15  | 10  |

- a) Calcule la media, la mediana y la moda.
- b) Determine la varianza y la desviación estándar de la muestra.
- c) Construya un polígono de frecuencias.

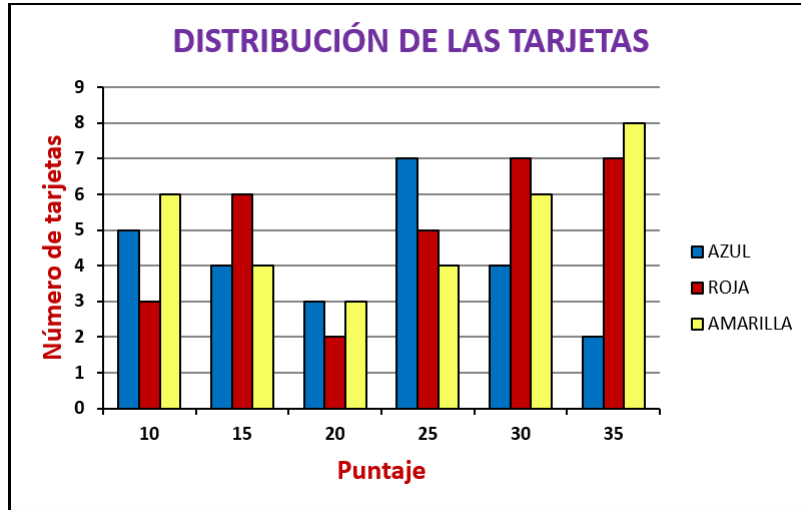
6. Calcule la media, la mediana, la moda, la varianza y la desviación estándar aproximados de la muestra a partir de los datos en la siguiente distribución de frecuencias:

| Intervalo de clase | Frecuencia |
|--------------------|------------|
| $[10 - 20)$        | 121        |
| $[20 - 30)$        | 165        |
| $[30 - 40)$        | 184        |
| $[40 - 50)$        | 173        |
| $[50 - 60)$        | 142        |
| $[60 - 70)$        | 120        |
| $[70 - 80)$        | 118        |
| $[80 - 90)$        | 110        |
| $[90 - 100]$       | 90         |

7. Calcule la media, la mediana, la moda, la varianza y la desviación estándar aproximados de la muestra a partir de los datos en la siguiente distribución de frecuencias:

| Intervalo de clase   | Frecuencia |
|----------------------|------------|
| $600 \leq x < 650$   | 41         |
| $650 \leq x < 700$   | 46         |
| $700 \leq x < 750$   | 50         |
| $750 \leq x < 800$   | 52         |
| $800 \leq x < 850$   | 60         |
| $850 \leq x < 900$   | 64         |
| $900 \leq x < 950$   | 65         |
| $950 \leq x < 1000$  | 70         |
| $1000 \leq x < 1050$ | 72         |

8. En la siguiente gráfica se muestran información sobre cierto número de tarjetas que usaron algunos niños en un juego, las tarjetas tienen puntajes y colores diferentes.

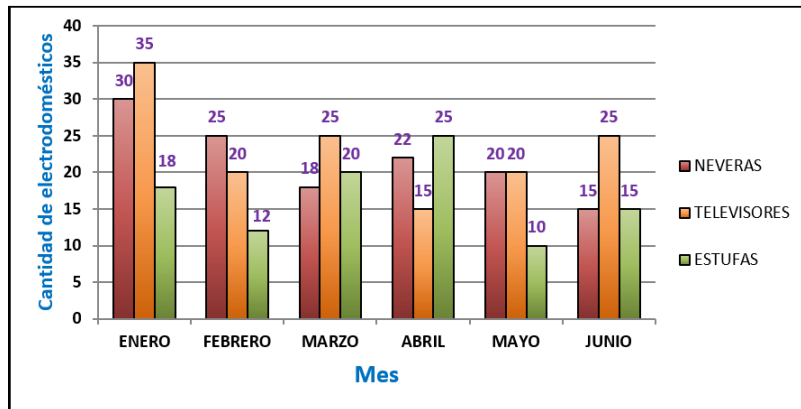


Responda las preguntas con base en la información representada en la gráfica.

- a) ¿Cuántas tarjetas hay de cada color?
  - b) ¿Cuántas tarjetas hay con puntajes inferiores a 30?
  - c) ¿Cuántas tarjetas hay con puntajes superiores a 15?
  - d) ¿Cuántas tarjetas rojas hay con puntajes inferiores a 25?
  - e) ¿Cuántas tarjetas azules hay con puntajes superiores a 20?
  - f) ¿Cuántas tarjetas amarillas hay con puntajes inferiores a 35?
  - g) ¿Cuántas tarjetas hay con puntajes superiores a 10 e inferiores a 30?
  - h) ¿Cuál es el promedio de puntaje de las tarjetas de cada color?
  - i) ¿Cuántas tarjetas hay en total?
  - j) ¿Cuál es el promedio de puntaje de todas las tarjetas?
9. Calcule las medidas de tendencia central, las medidas de posición y las medidas de dispersión para los datos de la siguiente tabla.

|       |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $x_i$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| $f_i$ | 42 | 50 | 48 | 52 | 56 | 54 | 46 | 45 | 60 | 47 |

10. La siguiente gráfica muestra las ventas de electrodomésticos en un almacén en los seis primeros meses del año 2022.

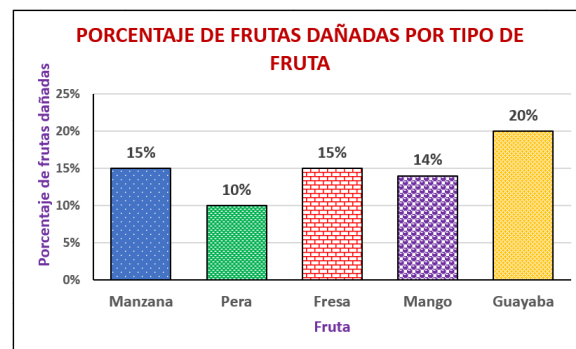
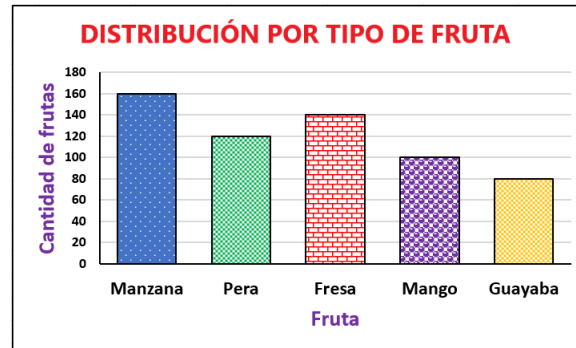


Responda las preguntas de acuerdo con la información representada en la gráfica.

- ¿En qué mes se vendieron más electrodomésticos?
- ¿En qué mes se vendieron menos electrodomésticos?
- ¿Cuál es el porcentaje de venta de electrodomésticos en cada mes?
- ¿Cuál es el promedio de venta mensual de neveras?
- ¿Cuál es el promedio de venta mensual de televisores?
- ¿Cuál es el promedio de venta mensual de estufas?
- ¿Cuál es el promedio de venta mensual de electrodomésticos?

## PREGUNTAS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE CON ÚNICA RESPUESTA

- En una frutería se tienen 600 frutas almacenadas para su distribución. De cada tipo de fruta se tiene un porcentaje de frutas dañadas. En los siguientes gráficos se muestra la distribución por tipo de fruta y el porcentaje de frutas dañadas de cada tipo.



La tabla que corresponde a la información proporcionada por los gráficos es:

A.

| Tipo de fruta | Cantidad de frutas dañadas |
|---------------|----------------------------|
| Manzanas      | 15                         |
| Peras         | 10                         |
| Fresas        | 15                         |
| Mangos        | 14                         |
| Guayabas      | 20                         |

C.

| Tipo de fruta | Cantidad de frutas dañadas |
|---------------|----------------------------|
| Manzanas      | 16                         |
| Peras         | 12                         |
| Fresas        | 14                         |
| Mangos        | 10                         |
| Guayabas      | 8                          |

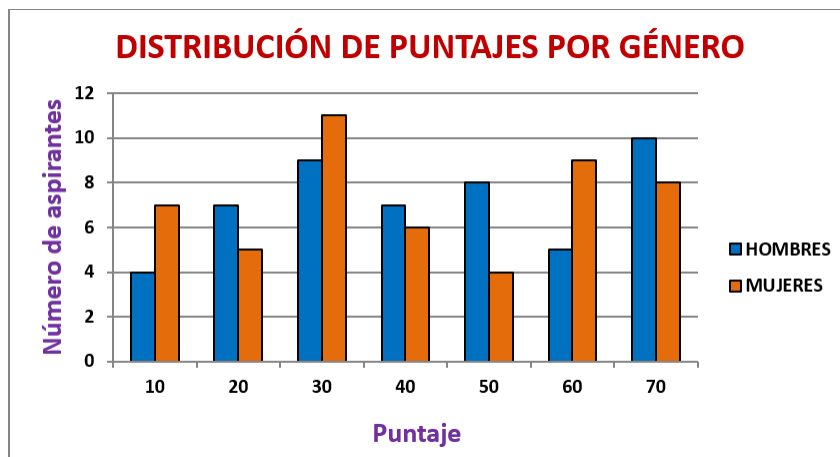
B.

| Tipo de fruta | Cantidad de frutas dañadas |
|---------------|----------------------------|
| Manzanas      | 24                         |
| Peras         | 12                         |
| Fresas        | 21                         |
| Mangos        | 14                         |
| Guayabas      | 16                         |

D.

| Tipo de fruta | Cantidad de frutas dañadas |
|---------------|----------------------------|
| Manzanas      | 31                         |
| Peras         | 22                         |
| Fresas        | 29                         |
| Mangos        | 24                         |
| Guayabas      | 28                         |

2. En una prueba realizada en un instituto de educación superior para la admisión de los estudiantes, se obtuvieron los puntajes presentados en la gráfica.

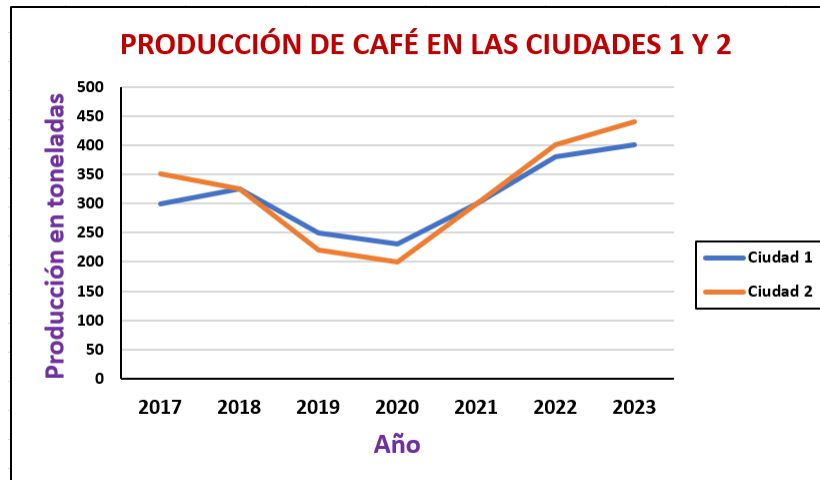


De acuerdo con la información representada en el gráfico es correcto afirmar que

- A. El promedio de los puntajes de las mujeres es mayor que el promedio de los puntajes de los hombres.
  - B. El promedio de los puntajes de los hombres es mayor que el promedio de los puntajes de las mujeres.
  - C. El promedio de los puntajes de los hombres es igual que el promedio de los puntajes de las mujeres.
  - D. No se pueden determinar los promedios de los puntajes ni para hombres ni para mujeres.
3. De acuerdo con la información representada en el gráfico anterior, **NO** es correcto afirmar que
- A. Hay el mismo número de mujeres que de hombres.
  - B. El promedio de los puntajes es menor para las mujeres.
  - C. La moda de los puntajes de los aspirantes es 30.
  - D. La mediana de los puntajes es mayor para los hombres.

**RESPONDA LAS PREGUNTAS 4, 5 Y 6 CON BASE EN LA SIGUIENTE INFORMACIÓN**

En el siguiente gráfico se muestra la producción de café en dos ciudades de Colombia desde el año 2017 hasta el año 2023.



4. ¿En qué años la producción de café fue igual en ambas ciudades?

- A. En 2017 y 2018.                      B. En 2020 y 2021.  
C. En 2018 y 2021.                      D. En 2019 y 2023.

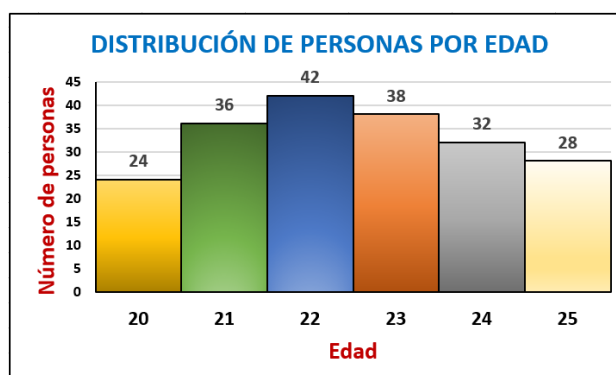
5. ¿En qué años la producción de café fue menor en la ciudad 2 que en la ciudad 1?

- A. En 2017 y 2022.                      B. En 2019 y 2020.  
C. En 2018 y 2021.                      D. En 2022 y 2023.

6. Es correcto afirmar que

- A. En la ciudad 1 la producción fue mayor en 2022.  
B. En la ciudad 2 la producción fue menor en 2017.  
C. En la ciudad 1 la producción fue menor en 2019.  
D. En la ciudad 2 la producción fue mayor en 2023.

7. En el siguiente gráfico se muestran la distribución de las edades de ciertas personas de un barrio de Montería.



Según la información representada en el gráfico es correcto afirmar que

- A. El promedio de la edad de estas personas es 42.
  - B. El promedio de la edad de estas personas está entre 42 y 38.
  - C. El promedio de la edad de estas personas es 22.
  - D. El promedio de la edad de estas personas está entre 22 y 23.
8. La variable tenida en cuenta en el punto anterior es
- A. Cuantitativa continua.
  - B. Cualitativa ordinal.
  - C. Cuantitativa discreta.
  - D. Cualitativa nominal.
9. Teniendo en cuenta la información del punto 7, al calcular el valor de la mediana se obtiene
- A. Un valor de 22.
  - B. Un valor de 42.
  - C. Un valor entre 42 y 38.
  - D. Un valor entre 22 y 23.
10. En un estudio realizado en cierta zona de Montería donde habitan 300 familias, se indagó sobre el número de hijos de cada núcleo familiar de 50 familias. Los resultados se registran en la siguiente tabla.

| Número de hijos | Cantidad de familias |
|-----------------|----------------------|
| 0               | 3                    |
| 1               | 4                    |
| 2               | 12                   |
| 3               | 14                   |
| 4               | 11                   |
| 5               | 4                    |
| 6               | 2                    |

Al calcular el promedio se obtiene

- A. 3.
- B. 3,5.
- C. 2,92.
- D. 3,12.

## Capítulo 2

# TÉCNICAS DE CONTEO

Primero se abordarán algunos conceptos necesarios para introducir luego los conceptos de permutaciones y combinaciones.

### 2.1. Definición de $n!$ .

El factorial de un número  $n$  está definido como el producto de los números naturales desde  $n$  hasta 1.

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Ej:  $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Nota:  $0! = 1$ .

### 2.2. Regla del producto o principio multiplicativo.

Esta regla establece que si se dan dos experimentos, uno con  $m$  resultados y uno con  $n$  resultados, las formas posibles de combinar los resultados del primero y los resultados del segundo se da de  $m \cdot n$  formas.

**Ejemplo.** Se lanzan una moneda y un dado al aire, ¿Cuántas resultados posibles se pueden obtener?



Se sabe que los resultados de lanzar la moneda son dos: {cara, sello} y los resultados de lanzar el dado son seis: {1,2,3,4,5,6}, de esta manera los resultados posibles de lanzar la moneda y el dado son:  $2 \cdot 6 = 12$ .

### 2.3. Regla de la suma.

Esta regla establece que si se dan dos experimentos, uno con  $m$  resultados y uno con  $n$  resultados sin que haya elementos comunes entre los dos experimentos, las formas posibles de obtener los resultados del primero o los resultados del segundo se da de  $m + n$  formas. Si existen  $p$  elementos comunes entre los dos experimentos las formas posibles son  $m + n - p$ .

**Ejemplo.** Se desea escoger entre cuatro frutas o tres dulces. ¿De cuántas formas posibles se puede elegir uno de los productos?



Como no hay una fruta que sea un dulce las formas posibles de escoger una fruta o un dulce es  $4 + 3 = 7$ .

**Ejemplo.** En un curso hay 30 estudiantes que juegan fútbol, 25 que juegan baloncesto y 10 que juegan ambos deportes. ¿Cuántas formas tiene el profesor de educación física de escoger a un estudiante que juegue fútbol o baloncesto?



Como existen estudiantes que juegan los dos deportes las formas posibles que tiene el profesor de escoger a un estudiante se calculan así:  $30 + 25 - 10 = 45$

## 2.4. Permutaciones y combinaciones.

Las permutaciones y las combinaciones son formas de organizar elementos en un conjunto, teniendo en cuenta si dichos elementos tienen orden o no y si se repiten o no se repiten. Si tenemos  $n$  elementos los podemos organizar todos juntos o formando grupos de  $r$  elementos.

### 2.4.1. Permutaciones.

Son formas de agrupar elementos teniendo en cuenta el orden. Si se tienen los números 1, 2 y 3 y se quieren organizar de dos en dos se puede ver que 23 y 32 son dos formas diferentes. Existen permutaciones con repetición y sin repetición.

#### Permutaciones con repetición.

Son aquellas en las que se permite repetir elementos en un mismo grupo. Si tenemos  $n$  elementos en total y queremos organizarlos en grupos de  $r$  elementos, se usa la siguiente fórmula:  $n^r$

**Ejemplo.** Si tenemos los números 1, 2, 3 y 4. Se pueden organizar de tres en tres. Aquí,  $n = 4$  y  $r = 3$ .

$$n^r = 4^3 = 64$$

Existen 64 formas diferentes de organizar los números del 1 al 4 de tres en tres. En este caso se permite repetir elementos por ejemplo 122, 332 o 444.

### Permutaciones sin repetición.

Son aquellas en las que no se permite repetir un mismo elemento en un grupo. Teniendo en cuenta el ejemplo anterior, en este caso, no se podría tener 122, 332 o 444. Se podría tener 123, 324, etc...

En este caso se utiliza la siguiente fórmula:

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

**Ejemplo.** Si tenemos los números 1, 2, 3 y 4. Se pueden organizar de dos en dos pero sin repetir números en un mismo grupo. Aquí,  $n = 4$  y  $r = 2$ .

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$${}_4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!}$$

$${}_4P_2 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1}$$

$${}_4P_2 = 12$$

Existen 12 formas diferentes de organizar los números del 1 al 4 de dos en dos sin repetición.

En caso de que se tomen todos los elementos se tiene que:

$${}_nP_n = n!$$

**Ejemplo.** Teniendo en cuenta el caso anterior tenemos

$${}_4P_4 = 4!$$

$${}_4P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$${}_4P_4 = 24$$

Existen 24 formas diferentes de organizar los números del 1 al 4 sin repetición.

**Permutaciones con elementos repetidos.**

Son aquellas en las que se repite un mismo elemento del conjunto total. Si en un conjunto existen  $n$  elementos y un elemento se repite  $k_1$  veces, otro se repite  $k_2$  veces, otro  $k_3$  veces hasta completar los  $n$  elementos, entonces, el número de permutaciones posibles se calcula utilizando la siguiente fórmula:

$$P_n^{k_1, k_2, k_3, \dots} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \dots}$$

**Ejemplo.:** Se tienen las letras de la palabra **CARRERA**. ¿Cuántas palabras distintas de siete letras se pueden obtener sin tener en cuenta si tienen sentido o no? Aquí,  $n = 7$ , ya que hay siete letras.

Como la  $C$  aparece una sola vez  $k_1 = 1$ .

Como la  $A$  aparece dos veces  $k_2 = 2$ .

Como la  $R$  aparece tres veces  $k_3 = 3$ .

Como la  $E$  aparece una sola vez  $k_4 = 1$ .

$$P_n^{k_1, k_2, k_3, k_4} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot k_4!}$$

$$P_n^{1,2,3,1} = \frac{7!}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 1!}$$

$$P_n^{1,2,3,1} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}$$

$$P_n^{1,2,3,1} = 420$$

Se pueden formar 420 palabras distintas.

#### Permutaciones circulares.

Una permutación circular es una permutación donde los elementos se ordenan uno al lado del otro en forma de circunferencia, teniendo en cuenta las ubicaciones a la derecha y a la izquierda. En este caso se utiliza la siguiente fórmula:

$$PC_n = (n - 1)!$$

**Ejemplo.** En un juego de cartas juegan cuatro amigos ubicados alrededor de una mesa. ¿De cuántas formas se pueden sentar los cuatro amigos alrededor de la mesa?

Aquí,  $n = 4$ , entonces,

$$PC_n = (n - 1)!$$

$$PC_4 = (4 - 1)!$$

$$= 3!$$

$$= 6$$

Existen 6 maneras de sentarse los cuatro amigos alrededor de la mesa.

### Permutaciones circulares con grupos de elementos.

Es una permutación circular en la cual se tienen elementos que deben estar juntos. Si se tienen  $n$  elementos y  $r$  de ellos deben estar juntos, entonces la permutaciones circulares se calculan mediante la fórmula:

$$PC_n^r = (n - r)! \cdot r!$$

**Ejemplo.** Cuatro líderes políticos se reúnen con el alcalde, el secretario de gobierno y un concejal. Estos se sientan en una mesa circular. ¿De cuántas formas se pueden sentar si el alcalde, el secretario de gobierno y el concejal deben estar uno al lado de otro?

Aquí,  $n = 7$  y  $r = 3$ , por lo tanto,

$$\begin{aligned} PC_n^r &= (n - r)! \cdot r! \\ PC_7^3 &= (7 - 3)! \cdot 3! \\ &= (4)! \cdot 3! \\ &= 24 \cdot 6 \\ &= 144 \end{aligned}$$

Se pueden sentar de 144 formas diferentes.

### 2.4.2. Combinaciones.

Son formas de agrupar elementos sin tener en cuenta el orden. Si se toman los números 1, 2 y 3 y se quieren organizar de dos en dos se tiene que 23 y 32 son lo mismo. Existen combinaciones con repetición y sin repetición.

### Combinaciones con repetición.

Son aquellas en las que no importa el orden y se permite repetir elementos en un mismo grupo. Si tenemos  $n$  elementos en total y queremos organizarlos en grupos de  $r$  elementos, se usa la siguiente fórmula:

$$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{(r)!(n-1)!}$$

**Ejemplo.** Si tenemos los números 1, 2, 3 y 4. Se pueden organizar de tres en tres. Aquí,  $n = 4$  y  $r = 3$ .

$$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{(r)!(n-1)!}$$

$$\binom{4+3-1}{3} = \frac{(4+3-1)!}{(3)!(4-1)!}$$

$$\binom{6}{3} = \frac{(6)!}{(3)!(3)!}$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3!}$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\binom{6}{3} = 20$$

Existen 20 formas diferentes de organizar los números del 1 al 4 de tres en tres. En este caso se permite repetir elementos por ejemplo 122, 332 o 444. Pero aquí, tener 122 es lo mismo que tener 221 o 212, ya que no importa el orden.

**Combinaciones sin repetición.**

Son aquellas en las que no importa el orden y no se permite repetir un mismo elemento en un grupo. Teniendo en cuenta el ejemplo anterior, en este caso, no se podría tener 122, 332 o 444. Aquí, tener 123 es lo mismo que tener 231 o 312. Se utiliza la siguiente fórmula:

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

**Ejemplos.**

1. Margarita desea preparar una ensalada, ella puede escoger entre pepino, zanahoria, tomate, lechuga y pimentón, pero solo debe escoger tres ingredientes. ¿De cuántas formas distintas puede preparar la ensalada?

**Solución.** En este caso se trata de una combinación sin repetición, ya que no importa el orden de los ingredientes y no se repiten. Aquí  $n = 5$  y  $r = 3$ . Aplicamos la fórmula

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$${}_5C_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!}$$

$${}_5C_3 = \frac{5!}{3!(2)!}$$

$${}_5C_3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1}$$

$${}_5C_3 = 10$$

Margarita puede preparar la ensalada de 10 formas diferentes.

2. En una competencia de atletismo participan 8 atletas. ¿De cuántas formas posibles se pueden establecer los tres primeros puestos?

**Solución.** En este caso se trata de una permutación sin repetición, ya que si importa el orden de los participantes (no es lo mismo llegar de primero que de segundo o tercero y un atleta no puede quedar de primero y segundo a la vez). Aquí  $n = 8$  y  $r = 3$ .

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$${}_8P_3 = \frac{8!}{(8-3)!}$$

$${}_8P_3 = \frac{8!}{(5)!}$$

$${}_8P_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$${}_8P_3 = 336$$

Existen 336 formas diferentes de establecer los tres primeros puestos.

3. ¿Cuántas boletas de dos cifras para una rifa se pueden generar con los dígitos?

**Solución.** En este caso se trata de una permutación con repetición, ya que si importa el orden de los números y se puede repetir un mismo número en una boleta. Aquí  $n = 10$  y  $r = 2$ . Aplicamos la fórmula correspondiente.

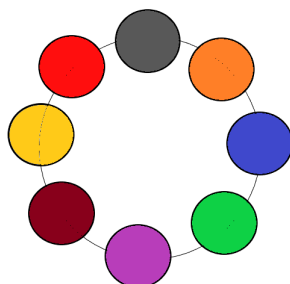
$$n^r = 10^2 = 100$$

Se pueden generar 100 boletas diferentes.

## Ejercicios.

1. En un restaurante ofrecen un menú para almuerzo, en el cual se ofrece arroz y una persona puede escoger una carne, una ensalada, un grano y un tipo de jugo. Entre las carnes hay res, cerdo y pechuga; entre las ensaladas hay de pepino, tomate, aguacate y lechuga; entre los granos hay frijol, garbanzo y lentejas; y entre los tipos de jugo hay de piña, naranja, mora, guayaba y fresa. ¿De cuántas formas distintas la persona puede pedir su almuerzo?
2. En una prueba de atletismo participan 10 atletas, ¿De cuántas formas se pueden establecer los cuatro primeros puestos?
3. En grado undécimo hay siete estudiantes interesados en hacer parte del gobierno escolar, ¿De cuántas formas posibles se pueden escoger tres estudiantes como candidatos para personero, representante de los estudiantes y contralor?
4. En una heladería ofrecen seis sabores de helado diferentes. Luisa quiere comprar un helado con tres sabores. ¿De cuántas formas puede elegir su helado si:
  - a) No desea repetir sabor.
  - b) Si desea repetir sabor?
5. Juan y Pedro juegan con un dado. Juan debe lanzar el dado tres veces y formar números de tres cifras, Pedro debe lanzar el dado cuatro veces y formar números de cuatro cifras. ¿Quién puede formar más números de los dos?
6. ¿De cuántas formas se pueden sentar 9 personas una al lado de la otra en 5 sillas organizadas de forma horizontal?
7. ¿De cuántas formas se pueden escoger 5 jugadores de microfútbol en un equipo de 12 jugadores (cualquiera puede ser el portero)?

8. Rupertico Tiene 8 pelotas de diferentes colores en una bolsa. El debe sacar una pelota y volverla a introducir en la bolsa y armar una secuencia de 5 colores sin importar que se repita. ¿de cuántas formas posibles puede armar la secuencia?
9. Laura tiene 11 peluches en su canasta de juguetes. ¿De cuántas formas puede escoger 6 peluches?
10. En un juego de lotería el premio consiste en acertar 5 números en cualquier orden. Las balotas se enumeran del 1 al 20. ¿Cuántas formas distintas hay de apostar una serie de números?
11. ¿Cuántas permutaciones distintas de siete letras se pueden formar con las letras de la palabra TERRAZA?
12. Se desea formar una circunferencia con círculos de colores como se muestra en la figura. ¿Cuantas circunferencias diferentes se pueden formar teniendo en cuenta la ubicación de los colores uno al lado del otro?



13. Pablo, Juan, Carlos, María, Luisa y Samuel se sientan alrededor de una mesa. ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar si Carlos y Luisa deben estar siempre uno al lado del otro?
14. El rector, el coordinador académico y el coordinador de convivencia de una institución educativa se reúnen con el personero estudiantil, el contralor estudiantil y un representante de los estudiantes. Si se sientan en mesa redonda, ¿de cuántas formas diferentes pueden sentarse si los directivos deben estar juntos?

# Capítulo 3

## PROBABILIDAD

Antes de hablar de probabilidad trataremos los conceptos de experimento aleatorio y suceso o evento.

### 3.1. Experimento aleatorio.

Un experimento aleatorio es un experimento del cual no se sabe con anterioridad el resultado que se va a obtener. Por ejemplo, cuando se lanza una moneda al aire no se sabe si saldrá cara o sello.



**Espacio muestral.** Es el conjunto de todos los posibles resultados que puede arrojar un experimento aleatorio. Por ejemplo, al lanzar un dado el espacio muestral es  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . A cada elemento del espacio muestral se le conoce como punto muestral y el número total de ellos se puede denotar como  $n(S)$ .



### 3.2. Suceso o evento.

Un suceso o evento es un subconjunto del espacio muestral. Si tenemos un suceso  $\mathbf{A}$ , el número de puntos muestrales del suceso se denota  $\mathbf{n(A)}$ . Por ejemplo, un suceso sería  $\mathbf{A=}$  "Sacar un número par", cuyos casos favorables son  $\{2, 4, 6\}$ .

### 3.3. Operaciones con sucesos.

Al ser los sucesos subconjuntos del espacio muestral, se pueden realizar entre ellos operaciones como intersección, unión, complemento y diferencia.

#### 3.3.1. Intersección de eventos.

Sean  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  dos sucesos definidos en un mismo espacio muestral  $\mathbf{S}$ . Se define la intersección entre  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{A \cap B}$ ) como el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a  $\mathbf{A}$  y a  $\mathbf{B}$  a la vez, es decir, los elementos comunes en ambos eventos. Si dos sucesos no poseen intersección, se dice que es vacía ( $\mathbf{A \cap B = \emptyset}$ ).

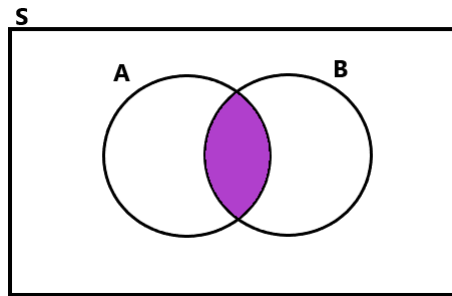


Figura 3.1: Representación gráfica de la intersección.

**Ejemplo.** Sean  $\mathbf{A = \{1, 2, 3, 5\}}$  y  $\mathbf{B = \{2, 4, 5, 6\}}$  dos sucesos, entonces,

$$\mathbf{A \cap B = \{2, 5\}}$$

### 3.3.2. Unión de eventos.

Sean **A** y **B** dos sucesos definidos en un mismo espacio muestral **S**. Se define la unión entre **A** y **B** ( $\mathbf{A \cup B}$ ) como el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a **A** o a **B** o a ambos, es decir, los elementos de los dos eventos juntos, sin repetir los que aparecen en ambos.

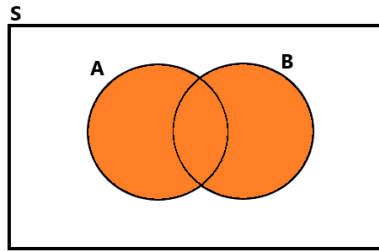


Figura 3.2: Representación gráfica de la unión.

**Ejemplo.** Sean  $\mathbf{A = \{1, 2, 3, 5\}}$  y  $\mathbf{B = \{2, 4, 5, 6\}}$  dos sucesos, entonces,

$$\mathbf{A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}}$$

### 3.3.3. Diferencia de eventos.

Sean **A** y **B** dos sucesos definidos en un mismo espacio muestral **S**. Se define la diferencia entre **A** y **B** ( $\mathbf{A - B}$ ) como el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a **A** y que no pertenecen a **B**.

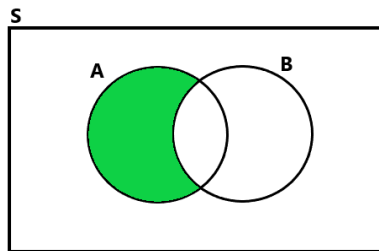


Figura 3.3: Representación gráfica de la diferencia.

**Ejemplo.** Sean  $\mathbf{A = \{1, 2, 3, 5\}}$  y  $\mathbf{B = \{2, 4, 5, 6\}}$  dos sucesos, entonces,

$$\mathbf{A - B = \{1, 3\}}$$

### 3.3.4. Complemento de un evento.

Sean  $\mathbf{A}$  un suceso definido en un espacio muestral  $\mathbf{S}$ . Se define el complemento de  $\mathbf{A}$  ( $\overline{\mathbf{A}}$ ) como el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a  $\mathbf{S}$  y que no pertenecen a  $\mathbf{A}$ , es decir, el conjunto de los elementos que le faltan a  $\mathbf{A}$  para completar todo el espacio muestral  $\mathbf{S}$ .

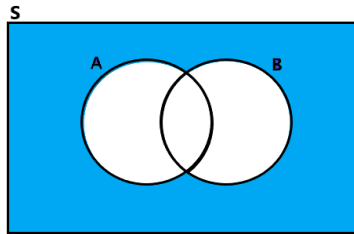


Figura 3.4: Representación gráfica del complemento.

**Ejemplo.** Sean  $\mathbf{S}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  el espacio muestral de un experimento aleatorio y  $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, 5\}$  un suceso, entonces,

$$\overline{\mathbf{A}} = \{4, 6, 7, 8, 9\}$$

### 3.3.5. Eventos mutuamente excluyentes.

Dos eventos son mutuamente excluyentes o disjuntos cuando su intersección es vacía, es decir, no tienen elementos comunes.  $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$ .

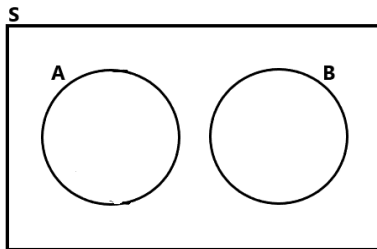


Figura 3.5: Representación gráfica de la diferencia.

**Ejemplo.** Sean  $\mathbf{A} = \{2, 3, 5\}$  y  $\mathbf{B} = \{4, 6\}$  dos sucesos, entonces,  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son mutuamente excluyentes.

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$$

### 3.3.6. Eventos colectivamente exhaustivos.

Dos eventos son colectivamente exhaustivos cuando su unión conforma todo el espacio muestral.

**Ejemplo.** Sean  $\mathbf{S}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  el espacio muestral de un experimento aleatorio,  $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, 5\}$  y  $\mathbf{B} = \{4, 6, 7, 8, 9\}$  dos sucesos, entonces,  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son colectivamente exhaustivos, ya que  $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{S}$ .

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

## 3.4. Probabilidad.

La probabilidad de un suceso o evento es un número que se le asigna a la posibilidad de que el suceso ocurra. Sea  $\mathbf{A}$  un suceso definido en un espacio muestral  $\mathbf{S}$ , la probabilidad de ocurrencia de un suceso  $\mathbf{A}$  se denota  $\mathbf{P}(\mathbf{A})$  y esta definida como el número de casos favorables de  $\mathbf{A}$  sobre el número total de casos de  $\mathbf{S}$ .

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número total de casos}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Debemos recordar que  $n(A)$  es el número de puntos muestrales de  $\mathbf{A}$  y  $n(S)$  el número de puntos muestrales de  $\mathbf{S}$ .

**Ejemplo.** Dado el experimento aleatorio  $\mathbf{E} = \text{"Lanzamiento de un dado"}$ , calcule la probabilidad de los siguientes eventos.

1.  $\mathbf{A} = \text{"Sacar un número impar"}$

Los casos favorables son  $\{1, 3, 5\}$ , por lo tanto, la probabilidad de  $\mathbf{A}$  sería

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Que también podemos expresar en notación decimal y porcentual.

$$P(A) = 0,5 \quad o \quad P(A) = 50 \%$$

2. **B** = "Sacar un número mayor que 4"

Los casos favorables son  $\{5, 6\}$ , por lo tanto, la probabilidad de **B** sería

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Notación decimal:  $P(B) = 0, \widehat{3}$  Notación porcentual:  $P(B) = 33,33 \%$

3. **C** = "Sacar un número menor o igual que 4"

Los casos favorables son  $\{1, 2, 3, 4\}$ , por lo tanto, la probabilidad de **C** sería

$$P(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Notación decimal:  $P(C) = 0, \widehat{6}$  Notación porcentual:  $P(C) = 66,66 \%$

4. **D** = "Sacar un número múltiplo de 3"

Los casos favorables son  $\{3, 6\}$ , por lo tanto, la probabilidad de **D** sería

$$P(D) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Notación decimal:  $P(D) = 0, \widehat{3}$  Notación porcentual:  $P(D) = 33,33 \%$ .

5. **F** = "Sacar el número 5". Los casos favorables son  $\{5\}$ , por lo tanto, la probabilidad de **F** sería

$$P(F) = \frac{1}{6}$$

Notación decimal:  $P(F) = 0,1 \widehat{6}$  Notación porcentual:  $P(F) = 16,66 \%$ .

### 3.4.1. Axiomas de probabilidad

Sean  $\mathbf{S}$  el espacio muestral de un experimento aleatorio y  $\mathbf{A}$  un suceso cualquiera definido en el espacio muestral  $\mathbf{S}$ , entonces se cumplen los siguientes axiomas:

1.  $0 \leq P(A) \leq 1$ .
2.  $P(S) = 1$ .
3. Sí  $\{A_i\}_{i \in N}$  son sucesos mutuamente excluyente definidos en el espacio muestral  $\mathbf{S}$ , entonces,

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (3.1)$$

### 3.4.2. Teoremas de probabilidad

Sean  $\mathbf{S}$  el espacio muestral de un experimento aleatorio,  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  dos sucesos cualesquiera definidos en el espacio muestral  $\mathbf{S}$  y  $\emptyset$  el suceso imposible (nulo), entonces se cumple:

1.  $P(\emptyset) = 0$ .
2.  $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ .
3.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

**Ejemplo.** Retomemos el ejemplo del lanzamiento de un dado. sabemos que  $\mathbf{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Definamos los siguientes sucesos.

$\mathbf{A}$ =Sacar un número par. =  $\{2, 4, 6\}$ .

$\mathbf{B}$ =Sacar un número mayor o igual que 3. =  $\{3, 4, 5, 6\}$ .

$\mathbf{C}$ =Sacar un número menor o igual que 5. =  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

$\mathbf{D}$ =Sacar un número menor que 3. =  $\{1, 2\}$ .

Calculemos las siguientes probabilidades.

a)  $P(A \cup B)$

Primero se halla la intersección  $A \cap B = \{4, 6\}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6}$$

$$= \frac{5}{6}$$

En notación decimal  $\rightarrow P(A \cup B) = 0,8333$ .

En notación porcentual  $\rightarrow P(A \cup B) = 83,33\%$ .

b)  $P(\overline{B})$

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B)$$

$$= 1 - \frac{4}{6}$$

$$= \frac{2}{6}$$

$$= \frac{1}{3}$$

En notación decimal  $P(\overline{B}) = 0,3333$ .

En notación porcentual  $P(\overline{B}) = 33,33\%$ .

c)  $P(A \cup D)$

Primero se halla la intersección  $A \cap D = \{2\}$

$$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D)$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{4}{6}$$

$$= \frac{2}{3}$$

En notación decimal  $\rightarrow P(A \cup D) = 0,6667$ .

En notación porcentual  $\rightarrow P(A \cup D) = 66,67\%$ .

d)  $P(\overline{C})$

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C)$$

$$= 1 - \frac{5}{6}$$

$$= \frac{1}{6}$$

En notación decimal  $\rightarrow P(\overline{C}) = 0,1667$ .

En notación porcentual  $\rightarrow P(A \cup D) = 16,67\%$ .

### 3.4.3. Probabilidad condicional.

Sean **A** y **B** dos sucesos cualesquiera definidos en el espacio muestral **S**. Se define la probabilidad de que ocurra **A** dado que a ocurrido **B** como  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ , a esta probabilidad se le llama probabilidad condicional.

**Ejemplo.** Se tomará el experimento aleatorio **E**=Lanzamiento de un dado. El espacio muestral es **S** = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Definamos los siguientes sucesos.

**A**=Sacar un número par. = {2, 4, 6}.

**B**=Sacar un número mayor o igual que 3. = {3, 4, 5, 6}.

**C**=Sacar un número menor o igual que 5. = {1, 2, 3, 4, 5}.

**D**=Sacar un número mayor que 3. = {4, 5, 6}.

Calculemos las siguientes probabilidades.

a)  $P(A|B)$

Primero se halla la intersección  $A \cap B = \{4, 6\}$

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{\frac{2}{6}}{\frac{4}{6}} \\ &= \frac{2}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

En notación decimal  $\rightarrow P(A|B) = 0,5$ .

En notación porcentual  $\rightarrow P(A|B) = 50\%$ .

b)  $P(D|C)$

Primero se halla la intersección  $D \cap C = \{4, 5\}$

$$\begin{aligned} P(D|C) &= \frac{P(D \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{\frac{2}{6}}{\frac{5}{6}} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

En notación decimal  $\rightarrow P(D|C) = 0,4$ .

En notación porcentual  $\rightarrow P(D|C) = 40\%$ .

En forma general la fórmula se puede simplificar de la siguiente manera.

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Donde  $n(A \cap B)$  es el número de puntos muestrales de  $(A \cap B)$  y  $n(B)$  es el número de puntos muestrales de  $B$ .

**Ejemplo.** Calcule  $P(B|C)$ .

Primero se halla la intersección  $B \cap C = \{3, 4, 5\}$

$$\begin{aligned} P(B|C) &= \frac{n(B \cap C)}{n(C)} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

En notación decimal  $\rightarrow P(D|C) = 0,6$ .

En notación porcentual  $\rightarrow P(D|C) = 60\%$ .

### 3.4.4. Sucesos independientes y sucesos dependientes.

#### Sucesos independientes.

Dos sucesos son independientes cuando la ocurrencia de uno no altera la probabilidad de ocurrencia del otro. Por ejemplo, si se lanza una moneda dos veces, el hecho de que salga cara en el primer lanzamiento no afecta que salga cara o sello en el segundo lanzamiento.

Si dos sucesos  $A$  y  $B$  son independientes, entonces se cumple que:

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{o} \quad P(B|A) = P(B)$$

Como  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$  de aquí  $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$  o

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

A  $P(A \cap B)$  se le conoce como probabilidad conjunta de  $A$  y  $B$ .

Si los sucesos son independientes, entonces  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ , ya que  $P(B|A) = P(B)$ . Esto quiere decir que si los sucesos son independientes para calcular su probabilidad conjunta  $P(A \cap B)$  simplemente se multiplican sus probabilidades individuales.

**Ejemplo.** Se lanza un dado dos veces, los sucesos definidos en el primer lanzamiento son independientes de los definidos en el segundo lanzamiento, ya que lo que se obtenga en el primer lanzamiento no afecta lo que se obtenga en el segundo lanzamiento.

- Calcule la probabilidad de que salga un número par en el primer lanzamiento y un número menor que 3 en el segundo lanzamiento.

$A = \text{Sacar un número par} = \{2, 4, 6\}$

$B = \text{Sacar un número menor que 3} = \{1, 2\}$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6}$$

$$= \frac{6}{36}$$

$$= \frac{1}{6}$$

En notación decimal  $\rightarrow P(A \cap B) = 0,1667$ .

En notación porcentual  $\rightarrow P(A \cap B) = 16,67\%$ .

- Calcule la probabilidad de que salga un número impar en el primer lanzamiento y un número mayor que 2 en el segundo lanzamiento.

$C = \text{Sacar un número impar} = \{1, 3, 5\}$

$D = \text{Sacar un número menor que 3} = \{3, 4, 5, 6\}$

$$P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D)$$

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6}$$

$$= \frac{12}{36}$$

$$= \frac{1}{3}$$

En notación decimal  $\rightarrow P(C \cap D) = 0,3333$ .

En notación porcentual  $\rightarrow P(C \cap D) = 33,33\%$ .

### Sucesos dependientes.

Dos sucesos son dependientes cuando la ocurrencia de uno altera la probabilidad de ocurrencia del otro.

Si dos sucesos son dependientes se cumple que:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) \quad \text{o} \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

**Ejemplo.** Una caja contiene 20 tarjetas de colores, 8 rojas, 6 azules, 4 verdes y 2 blancas. Se extraen dos tarjetas de la caja una después de la otra sin volver a introducir la primera.

- Calcule la probabilidad de extraer una tarjeta roja en la primera extracción y una tarjeta azul en la segunda extracción.

$A$  = Sacar una tarjeta roja en la primera extracción.  $\rightarrow n(A)=8$ .

$B$  = Sacar una tarjeta azul en la segunda extracción.  $\rightarrow n(B)=6$ .

Debemos tener en cuenta que para la primera extracción hay 20 tarjetas en la caja, pero para la segunda extracción solo hay 19.

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B|A) \\ &= \frac{8}{20} \cdot \frac{6}{19} \\ &= \frac{48}{380} \\ &= \frac{12}{95} \end{aligned}$$

En notación decimal  $\rightarrow P(C \cap D) = 0,1263$ .

En notación porcentual  $\rightarrow P(C \cap D) = 12,63\%$ .

### 3.4.5. Diagrama de árbol.

Un diagrama de árbol es una representación gráfica donde se identifican diferentes sucesos con sus respectivas probabilidades. Se puede utilizar para calcular probabilidades conjuntas o probabilidades condicionales. Las líneas que salen de cada punto se llaman ramas y cada punto donde se encuentran las ramas se llama nodo. En cada rama se escribe la probabilidad correspondiente a dicho suceso. La suma de las probabilidades de las ramas que pertenecen a un mismo nodo siempre es 1.

**Ejemplo.** Se lanza una moneda dos veces. Calcule la probabilidad de que salga cara en ambos lanzamientos.

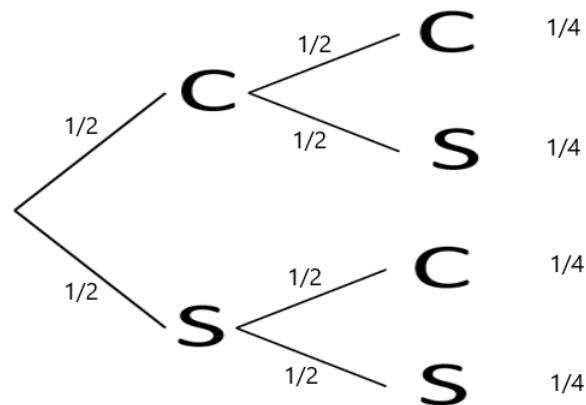


Figura 3.6: Diagrama de árbol para el lanzamiento de dos monedas.

$$P(C \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

### 3.4.6. Teorema de la probabilidad total.

Sea  $\{A_i\}_{i \in N}$  un conjunto de sucesos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos en el espacio muestral  $S$ , donde la probabilidad de cada uno de ellos es diferente de cero y dado un suceso  $B$  cuyas probabilidades condicionales  $P(B|A_i)$  se conocen, entonces se cumple que:  $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)$ .

**Ejemplo.** En un salón de clases hay 20 estudiantes hombres y 30 mujeres. De los 20 hombres el 60 % trabaja en clase y de las mujeres el 80 % no trabaja en clase. El profesor desea elegir a un estudiante al azar. Calcule la probabilidad de elegir a un estudiante que trabaja en clase.

**Solución.**

Sea  $A_1 = \text{"Elegir a un hombre"}$ .

Sea  $A_2 = \text{"Elegir a una mujer"}$ .

Sea  $B = \text{"Elegir a un estudiante que trabaja en clase"}$ .

**Datos conocidos.**

$$n(A_1) = 20$$

$$n(A_2) = 30$$

$$n(S) = 50$$

$$P(B|A_1) = 60\% = 0,6$$

$$P(B|A_2) = 80\% = 0,8$$

Calculamos entonces  $P(A_1)$  y  $P(A_2)$ .

$$P(A_1) = \frac{n(A_1)}{n(S)} = \frac{20}{50} = 0,4$$

$$P(A_2) = \frac{n(A_2)}{n(S)} = \frac{30}{50} = 0,6$$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) \\ &= 0,6 \cdot 0,4 + 0,8 \cdot 0,6 \\ &= 0,24 + 0,48 \\ &= 0,72 \end{aligned}$$

La probabilidad de escoger a un estudiante que trabaja en clase es de 0.72 o 72 %.

### 3.4.7. Teorema de Bayes.

Sea  $\{A_i\}_{i \in N}$  un conjunto de sucesos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos en el espacio muestral  $S$ , donde la probabilidad de cada uno de ellos es diferente de cero y sea un suceso  $B$  cuyas probabilidades condicionales  $P(B|A_i)$  se conocen, entonces se cumple que:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B|A_j) \cdot P(A_j)}$$

**Ejemplo.** Teniendo en cuenta el ejemplo anterior, determine

1. la probabilidad de elegir a un hombre dado que trabaja en clase.
2. la probabilidad de elegir a una mujer dado que trabaja en clase.

#### **Solución.**

Ya se definieron

$A_1 = \text{"Elegir a un hombre"}$ .

$A_2 = \text{"Elegir a una mujer"}$ .

$B = \text{"Elegir a un estudiante que trabaja en clase"}$ .

#### **Datos conocidos.**

$$n(A_1) = 20$$

$$n(A_2) = 30$$

$$n(S) = 50$$

$$P(B|A_1) = 60\% = 0,6$$

$$P(B|A_2) = 80\% = 0,8$$

Calculamos entonces  $P(A_1)$  y  $P(A_2)$ .

$$P(A_1) = \frac{n(A_1)}{n(S)} = \frac{20}{50} = 0,4$$

$$P(A_2) = \frac{n(A_2)}{n(S)} = \frac{30}{50} = 0,6$$

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) \\
&= 0,6 \cdot 0,4 + 0,8 \cdot 0,6 \\
&= 0,24 + 0,48 \\
&= 0,72
\end{aligned}$$

1. Debemos calcular  $P(A_1|B)$ , entonces,

$$\begin{aligned}
P(A_1|B) &= \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B)} \\
&= \frac{0,6 \cdot 0,4}{0,72} \\
&= 0,3333
\end{aligned}$$

La probabilidad de escoger a un estudiante hombre dado que trabaja es de 0.3333 o 33.33 %.

1. Debemos calcular  $P(A_2|B)$ , entonces,

$$\begin{aligned}
P(A_2|B) &= \frac{P(B|A_2) \cdot P(A_2)}{P(B)} \\
&= \frac{0,8 \cdot 0,6}{0,72} \\
&= 0,6666
\end{aligned}$$

La probabilidad de escoger a un estudiante mujer dado que trabaja es de 0.6666 o 66.66 %.

## Ejercicios.

1. En una urna se depositan 50 balotas enumeradas del 1 al 50. Calcule la probabilidad de extraer una balota marcada con:
  - a)* Un número par.
  - b)* Un número primo.
  - c)* Un número menor que 15.
  - d)* Un número con raíz cuadrada exacta.
  - e)* Un número múltiplo de 3.
  - f)* Un número divisor de 12.
  - g)* Un número mayor que 6 y menor que 18.
  - h)* Un número mayor o igual que 35.
  - i)* Un número menor o igual que 16.
  - j)* Un número impar o mayor que 40.
  - k)* Un número menor que 10 o múltiplo de 4.
2. Pedrito tiene en una caja 5 canicas rojas, 8 azules, 6 verdes, 4 blancas y 2 amarillas. Si desea sacar al azar una canica de la caja, halle la probabilidad de que sea:
  - a)* Roja.
  - b)* Verde.
  - c)* Azul.
  - d)* Blanca.
  - e)* Amarilla.
  - f)* Roja o verde.
  - g)* Azul o blanca.
  - h)* Verde o amarilla.

3. Considere el experimento aleatorio  $E = \text{''Lanzamiento de dos dados''}$ . Determine el espacio muestral y calcule la probabilidad de que:
- a)* La suma sea siete.
  - b)* La suma sea doce.
  - c)* La suma sea seis.
  - d)* La suma sea uno.
  - e)* En solo uno de los dos dados salga el 2.
  - f)* Salga el mismo número en ambos dados.
  - g)* Salga un número par en ambos dados.
  - h)* Salga un múltiplo de 3 en solo uno de los dos dados.
  - i)* Salga un número primo en ambos dados.
  - j)* Salga un número con raíz cuadrada en solo uno de los dados.
4. Una persona compra 8 boletas de una rifa de 100 boletas, ¿Qué probabilidad tiene la persona de perder?
5. En una empresa se rifará un viaje a Cartagena con todos los gastos pagos. Participarán en la rifa los 20 empleados del departamento de ventas, los 12 empleados del departamento de publicidad, los 8 empleados del departamento de nómina y los 10 empleados del departamento de contabilidad. Calcule la probabilidad de que gane el viaje un empleado del departamento de:
- a)* Ventas.
  - b)* Publicidad.
  - c)* Nómina.
  - d)* Contabilidad.
  - e)* Ventas o nómina.
  - f)* Publicidad o contabilidad.

6. En la siguiente tabla se clasifican a los empleados de una empresa según su estado civil.

| Estado civil<br>Género | Soltero | Casado | Separado | Viudo | Total |
|------------------------|---------|--------|----------|-------|-------|
| Hombre                 | 10      | 18     | 6        | 2     | 36    |
| Mujer                  | 12      | 17     | 9        | 1     | 39    |
| Total                  | 22      | 35     | 15       | 3     | 75    |

Se desea elegir a uno de los empleados para asistir a una capacitación. Calcule la probabilidad de que el empleado sea:

- a) Un hombre.
- b) Una mujer.
- c) Soltero.
- d) Casado.
- e) Separado.
- f) Viudo.
- g) Soltero o casado.
- h) Separado o viudo.
- i) Una mujer soltera.
- j) Una mujer separada.
- k) Un hombre casado.
- l) Un hombre viudo.
- m) Una mujer dado que es casada.
- n) Un hombre dado que es soltero.
- $\tilde{n}$ ) Viudo dado que es hombre.
- o) Separado dado que es mujer.
- p) Casado dado que es hombre.

7. En un almacén de ropa deportiva se distribuyen camisetas de diferentes tallas y colores como se muestra en la siguiente tabla.

| Color<br>Talla | Rojo | Azul | Verde | Negro | Amarillo | Total |
|----------------|------|------|-------|-------|----------|-------|
| S              | 30   | 25   | 28    | 25    | 32       | 140   |
| M              | 36   | 22   | 26    | 30    | 28       | 142   |
| L              | 26   | 20   | 32    | 18    | 30       | 126   |
| XL             | 24   | 18   | 22    | 16    | 12       | 92    |
| Total          | 116  | 85   | 108   | 89    | 102      | 500   |

Suponiendo que todas las camisetas tienen la misma probabilidad de ser elegidas. Determine la probabilidad de que se elija:

- a) Una camiseta roja.
- b) Una camiseta azul.
- c) Una camiseta verde.
- d) Una camiseta talla S.
- e) Una camiseta talla M.
- f) Una camiseta talla XL.
- g) Una camiseta negra o amarilla.
- h) Una camiseta azul o verde.
- i) Una camiseta roja o negra.
- j) Una camiseta talla M o L.
- k) Una camiseta talla S o XL.
- l) Una camiseta amarilla o talla S.
- m) Una camiseta verde o talla L.
- n) Una camiseta roja o talla M.
- $\tilde{n}$ ) Una camiseta verde dado que es talla S.

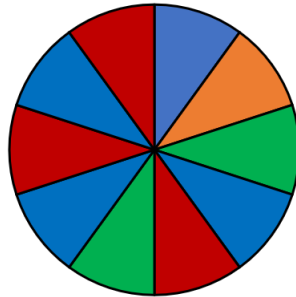
- o*) Una camiseta amarilla sabiendo que es talla L.
  - p*) Una camiseta talla XL sabiendo que es azul.
  - q*) Una camiseta talla S dado que es roja.
  - r*) Una camiseta talla M sabiendo que es verde.
  - s*) Una camiseta azul y talla M.
  - t*) Una camiseta verde y talla L.
  - u*) Una camiseta talla XL y amarilla.
  - v*) Una camiseta talla S y azul.
8. Se lanza una moneda dos veces, calcule la probabilidad de que salga:
- a*) Cara en solo uno de los dos lanzamientos.
  - b*) Sello en ambos lanzamientos.
  - c*) Cara en uno o ambos lanzamientos.
  - d*) Sello en el primer lanzamiento y cara en el segundo.
9. Una pareja de esposos desea tener cuatro hijos, determine la probabilidad de que:
- a*) El primer hijo sea una niña.
  - b*) El segundo hijo sea un niño.
  - c*) Los dos primeros hijos sean niñas.
  - d*) Los tres primeros hijos sean niños.
  - e*) El primer hijo sea niño y el segundo una niña.
  - f*) Los dos primeros hijos sean niñas y los dos últimos sean niños.
  - g*) Los cuatro hijos sean niñas.
  - h*) El primer hijo sea niño y los dos últimos sean niñas.

10. En una urna se depositan 4 balotas blancas, 2 balotas verde, 3 balotas azules y 1 balota roja. Se desean extraer dos balotas una después de la otra sin volver a introducir la primera en la urna. Calcule la probabilidad de que se extraiga:
- a) Una balota blanca en cada extracción.
  - b) Una balota verde en la primera extracción y una balota roja en la segunda.
  - c) Una balota azul en la primera extracción y una balota blanca en la segunda.
  - d) Una balota roja en la primera extracción y una balota azul en la segunda.
11. En un grupo de 40 estudiantes de cierto grado se les preguntó si les gustaba las matemáticas, el inglés y las ciencias, de lo cual se obtuvieron los siguientes resultados: A 27 les gusta matemáticas, a 21 les gusta inglés y 16 les gusta ciencias; a 13 les gusta matemáticas e inglés, a 9 les gusta matemáticas y ciencias y a 7 les gusta inglés y ciencias; a 5 les gustan las tres materias. Si se elige un estudiante al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que le guste solamente matemáticas?, ¿Cuál es la probabilidad de que le guste solamente inglés?, ¿Cuál es la probabilidad de que le guste solamente ciencias?
12. En un salón de clases estudian 28 niñas y 22 niños, el profesor de estadística desea escoger a un estudiante al azar para resolver un ejercicio. Calcule la probabilidad de que el estudiante a escoger sea:
- a) Niña.
  - b) Niño.
13. Juan tiene en una caja 25 canicas de colores, 8 son rojas, 6 son verdes, 5 son azules, 4 son blancas y el resto son negras. El desea elegir una canica de la caja sin mirar su color. Calcule la probabilidad de que sea:

- a)* Roja.
  - b)* Azul.
  - c)* Negra.
  - d)* Roja o azul.
  - e)* Blanca o negra.
  - f)* ¿Son los eventos escoger una canica azul y escoger una canica blanca mutuamente excluyentes? Explique su respuesta.
  - g)* ¿Son los eventos escoger una canica roja y escoger una canica negra colectivamente exhaustivos? Explique su respuesta.
14. Una fábrica de tornillos produce tornillos grandes, medianos y pequeños, se ha detectado que de los tornillos grandes, medianos y pequeños salen defectuosos el 8 %, 5 % y 3 % respectivamente. En un día se fabrican 2000 tornillos grandes, 3000 tornillos medianos y 5000 tornillos pequeños. Si se escoge un tornillos al azar en un día, calcule la probabilidad de que sea:
- a)* Grande.
  - b)* Mediano.
  - c)* Pequeño.
  - d)* Grande y defectuoso
  - e)* Mediano y defectuoso.
  - f)* Pequeño y defectuoso.
  - g)* Defectuoso.
  - h)* No defectuoso.
  - i)* Grande dado que es defectuoso.
  - j)* Mediano dado que es defectuoso.
  - k)* Pequeño dado que es defectuoso.
  - l)* Defectuoso dado que es grande.

## PREGUNTAS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE CON ÚNICA RESPUESTA

1. En un juego de azar se utiliza una ruleta como se muestra en la figura. El juego consiste en lanzar un dardo y recibir un puntaje por color. Si el dardo cae en un sector azul se ganan 10 puntos, si cae en un sector roja se ganan 20 puntos, si cae en un sector verde se ganan 30 puntos y si cae en un sector anaranjado se ganan 50 puntos.



La probabilidad de obtener 20 puntos es

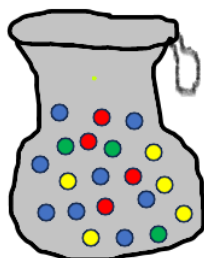
- A. mayor que la probabilidad de obtener 50 puntos y menor que la probabilidad de obtener 30 puntos.
  - B. menor que la probabilidad de obtener 10 puntos y menor que la probabilidad de obtener 50 puntos.
  - C. mayor que la probabilidad de obtener 30 puntos y menor que la probabilidad de obtener 10 puntos.
  - D. menor que la probabilidad de obtener 30 puntos y mayor que la probabilidad de obtener 50 puntos.
2. Luís, Manuel, Julia y Sara juegan parqués. Todos quedan con una sola ficha. Julia tiene su última ficha con entrada a siete, Manuel tiene su última ficha con entrada a ocho, Luís tiene su última ficha con entrada a diez y Sara tiene su última ficha con entrada a once.

Julia afirma que tiene la mayor probabilidad de ganar.

Su afirmación es

- A. falsa, porque todos los jugadores tienen la misma probabilidad de ganar.
- B. verdadera, porque entre menor sea el puntaje mayor es la probabilidad de ganar.
- C. falsa, porque Sara necesita once puntos que es un puntaje mayor que el de los demás.
- D. verdadera, porque sacar siete puntos es más probable que sacar ocho, diez u once puntos.

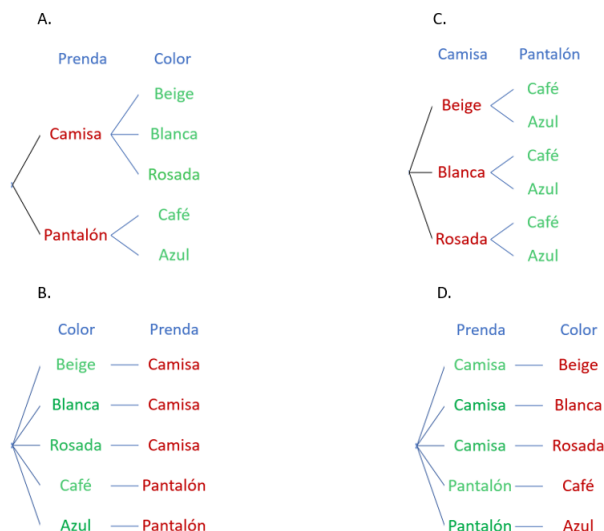
3. En un almacén ofrecen un premio a los clientes para motivarlos a comprar sus productos. Para establecer el premio se tiene una bolsa oscura con 20 balotas de colores como se muestra en la figura. Si el cliente saca una balota azul gana un exprimidor de naranjas, si saca una balota amarilla gana una plancha, si saca una balota roja gana una sanduchera y si saca una balota verde gana una licuadora.



Es correcto afirmar que un cliente tiene

- A. mayor probabilidad de ganar una licuadora que una plancha.
  - B. menor probabilidad de ganar un exprimidor que una sanduchera.
  - C. mayor probabilidad de ganar una sanduchera que una licuadora.
  - D. menor probabilidad de ganar una plancha que una sanduchera.
4. Camilo desea escoger una camisa y un pantalón para ir a la fiesta de cumpleaños de Lucía. De las camisas tiene pensado escoger entre una beige, una blanca y una rosada. Entre los pantalones quiere escoger entre uno café y uno azul.

El diagrama de árbol que muestra las posibilidades que tiene Camilo de escoger la camisa y el pantalón es



**RESPONDA LAS PREGUNTAS DE LA 5 A LA 8 CON BASE EN LA TABLA**

En la siguiente tabla se muestra la distribución de aves por especie y género.

| Género \ Especie | Especie |    |    |    |       |
|------------------|---------|----|----|----|-------|
|                  | A       | B  | C  | D  | Total |
| Macho            | 10      | 15 | 5  | 10 | 40    |
| Hembra           | 5       | 20 | 25 | 10 | 60    |
| Total            | 15      | 35 | 30 | 20 | 100   |

5. La probabilidad de escoger un ave de la especie A o de la especie D es

- A.  $\frac{7}{20}$ .
- B.  $\frac{1}{5}$ .
- C.  $\frac{3}{20}$ .
- D.  $\frac{2}{5}$ .

6. La probabilidad de escoger un ave de la especie C o hembra es

- A.  $\frac{1}{4}$ .
- B.  $\frac{9}{10}$ .
- C.  $\frac{13}{20}$ .
- D.  $\frac{3}{5}$ .

7. La probabilidad de escoger un ave de la especie B dado que es macho es

- A.  $\frac{7}{8}$ .
- B.  $\frac{3}{8}$ .
- C.  $\frac{3}{4}$ .
- D.  $\frac{3}{7}$ .

8. La probabilidad de escoger un ave de la hembra y de la especie A es

- A.  $\frac{1}{20}$ .
- B.  $\frac{3}{4}$ .
- C.  $\frac{3}{5}$ .
- D.  $\frac{3}{20}$ .

## Bibliografía

Galdós, L. (2004). Matemáticas Galdós. Cultural,S.A.

Ministerio de Educación, Colombia (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. (p. 64). Bogotá. Ministerio de Educación Nacional.

Tejero, J. (10 de febrero de 2019). Probabilidades - Ejercicios Resueltos - Nivel 1A. Matemóvil. <https://www.youtube.com/watch?v=0lxZMaoeUno>

Tejero, J. (14 de noviembre de 2018). Probabilidades - Ejercicios Resueltos - Nivel 1B. Matemóvil. <https://www.youtube.com/watch?v=FBRAWqFgPqc>

Tejero, J. (15 de noviembre de 2018). Probabilidades - Ejercicios Resueltos - Nivel 1B. Matemóvil. <https://www.youtube.com/watch?v=xZMYXcqAPl0>